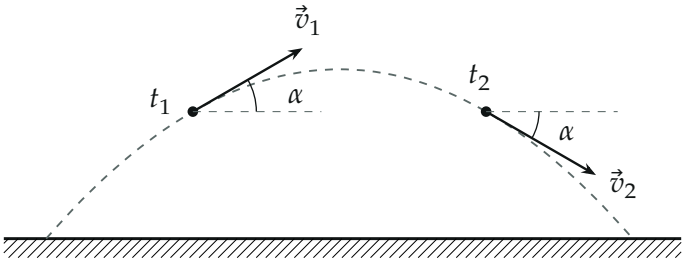
Углы скорости в моменты t1 и t2

Задача 2. [Росатом 2021/22, заключительный этап, 9 класс, задача 2] Скорость тела, брошенного с земли под некоторым углом к горизонту, оказалась направленной под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту в моменты времени t_1 и t_2, отсчитанные от момента броска. Найти дальность полета тела и максимальную высоту подъема. Ускорение свободного падения равно g. Сопротивлением воздуха пренебречь.



Поясняющий рисунок: в моменты t_1 и t_2 скорость составляет угол α с горизонтом

▲ **Решение. Что происходит.** Тело летит по параболе с постоянным ускорением $\vec{g}$. Горизонтальная проекция скорости не меняется, вертикальная убывает равномерно. Угол 30° с горизонтом скорость имеет дважды: на подъёме (вверх) и на спуске (вниз), причём в эти моменты вертикальные проекции скорости равны по модулю и противоположны по знаку. Главная идея — симметрия полёта относительно верхней точки: вершина лежит ровно посередине между t_1 и t_2.

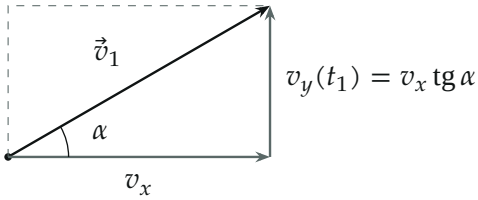
Обозначения. Ось x — горизонтально в сторону полёта, ось y — вертикально вверх, начало — в точке броска. v_x — горизонтальная проекция скорости (постоянна), $v_y(t)$ — вертикальная, v_{0y} — её начальное значение, $t_в$ — момент прохождения верхней точки, τ — полное время полёта, S — дальность, h — максимальная высота.

1. Закон изменения скорости. Ускорение $\vec{g}$ постоянно, поэтому $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{g}\,t$. В проекциях на оси:

$$v_x = \text{const}, \qquad v_y(t) = v_{0y} - g\,t.$$

Угол скорости с горизонтом определяется отношением проекций: $\operatorname{tg}\beta = v_y/v_x$. В момент t_1 тело поднимается, в момент t_2 — опускается, поэтому

$$v_y(t_1) = v_x \operatorname{tg}\alpha, \qquad v_y(t_2) = -v_x \operatorname{tg}\alpha.$$



Скорость в момент t_1 и её проекции на оси

2. Время подъёма. Сложим два равенства пункта 1: $v_y(t_1) + v_y(t_2) = 0$, то есть

$$(v_{0y} - gt_1) + (v_{0y} - gt_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{0y} = \frac{g\,(t_1 + t_2)}{2}.$$

В верхней точке $v_y = 0$, поэтому время подъёма $t_в = v_{0y}/g = \dfrac{t_1 + t_2}{2}$ — середина между t_1 и t_2. Полёт симметричен (спуск занимает столько же, сколько подъём), значит, полное время полёта

$$\tau = 2t_в = t_1 + t_2.$$

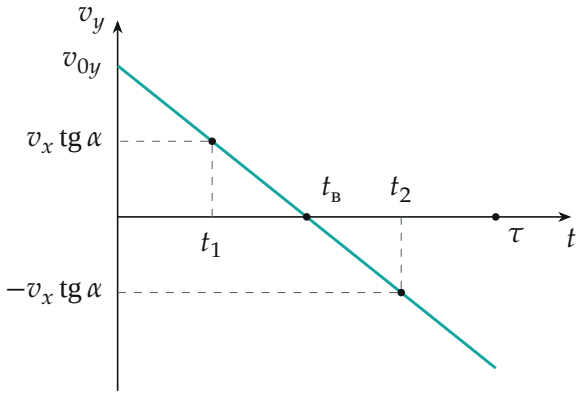


График $v_y(t)$ — прямая; значения в t_1 и t_2 противоположны, поэтому вершина $t_в$ — посередине, а $\tau = 2t_в$

3. Горизонтальная скорость. От t_1 до вершины v_y убывает от $v_x \operatorname{tg}\alpha$ до нуля за время $t_в - t_1 = \dfrac{t_2 - t_1}{2}$, поэтому

$$v_x \operatorname{tg}\alpha = g\,\frac{t_2 - t_1}{2} \quad \Rightarrow \quad v_x = \frac{g\,(t_2 - t_1)}{2\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,g\,(t_2 - t_1),$$

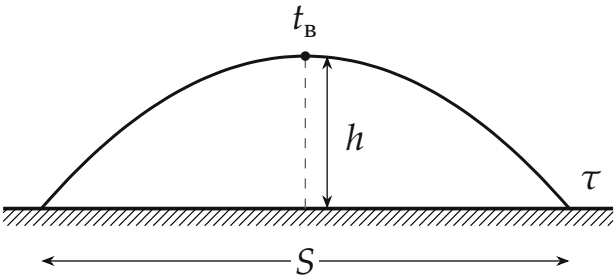
так как $\operatorname{tg} 30^\circ = 1/\sqrt{3}$.

4. Дальность. По горизонтали тело движется равномерно всё время полёта τ:

$$S = v_x\tau = \frac{g\,(t_2 - t_1)(t_1 + t_2)}{2\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,g\,(t_2^2 - t_1^2).$$

5. Высота. По вертикали движение равнозамедленное; в верхней точке $v_y = 0$. Из формулы $v_y^2 - v_{0y}^2 = -2g\,y$ при $y = h$:

$$h = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{g\,(t_1 + t_2)^2}{8}.$$



Дальность $S = v_x\tau$ и высота $h = v_{0y}^2/(2g)$

Обратите внимание. Вершина лежит посередине между t_1 и t_2 только потому, что угол в эти моменты один и тот же, а горизонтальная проекция скорости постоянна: значит, равны по модулю и вертикальные проекции. Начальный угол броска для ответа знать не нужно.

Проверка. Размерность: $g \cdot t^2$ — длина. Предел: при $t_1 \to t_2$ угол 30° достигается только в вершине, где $v_y = 0$, это возможно лишь при $v_x \to 0$, то есть вертикальном броске — и действительно $S \to 0$, $h \to gt_2^2/2$ (тело поднимается за время t_2). Второй способ для h: высота в момент t_2 и спуск от вершины до этого момента (за время $\frac{t_2-t_1}{2}$ без начальной вертикальной скорости) в сумме дают h:

$$y(t_2) = v_{0y}t_2 - \frac{gt_2^2}{2} = \frac{gt_1t_2}{2}, \qquad h = \frac{gt_1t_2}{2} + \frac{g}{2}\left(\frac{t_2-t_1}{2}\right)^2 = \frac{g(t_1+t_2)^2}{8}$$

— совпало. Смысл: два момента с одинаковым углом задают и середину полёта, и скорость изменения v_y между ними, а этого хватает на обе проекции скорости.

Ответ. $S = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\, g\,(t_2^2 - t_1^2)$, $\quad h = \dfrac{g\,(t_1+t_2)^2}{8}$.