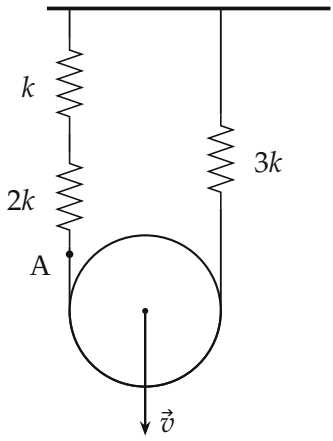
Три пружины и подвижный блок

Задача 3. [Росатом 2021/22, заключительный этап, 9 класс, задача 3] Куски невесомой нерастяжимой нити связывают три невесомые пружины с коэффициентами жесткости k, $2k$ и $3k$. Концы веревки прикреплены к горизонтальному потолку, а сама она охватывает невесомый подвижный блок так, как показано на рисунке. Куски веревки от потолка до блока вертикальны. В некоторый момент времени блок начинают тянуть вниз с постоянной скоростью $\vec{v}$. С какой скоростью движется точка A (см. рисунок)? Какой силой нужно действовать на блок через время t после начала движения? Считать, что для любых растяжений пружин справедлив закон Гука.



▲ **Решение. Что происходит.** Пружины и куски нити соединены последовательно в одну «верёвку», которая охватывает блок. Нить и пружины невесомы, поэтому натяжение T одинаково по всей длине — каждую пружину растягивает одна и та же сила, и удлинения обратно пропорциональны жёсткостям. Блок, опускаясь на x, удлиняет обе ветви на x, то есть всю «верёвку» на $2x$; нить нерастяжима, значит, всё это удлинение приходится на пружины. Класс задачи — кинематическая связь через длину нити плюс закон Гука.

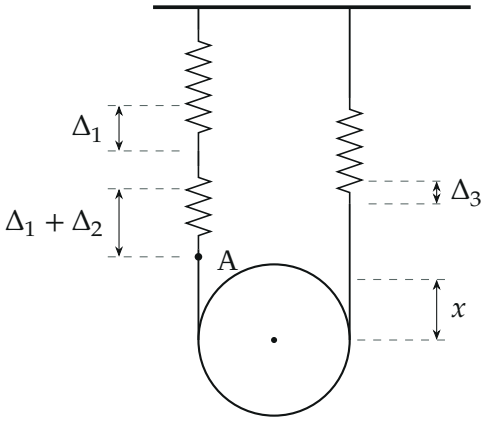
Обозначения. Ось y — вертикально вниз. $x = vt$ — смещение блока за время t; Δ_1, Δ_2, Δ_3 — удлинения пружин k, $2k$, $3k$; T — натяжение нити; F — сила, с которой тянут блок.

1. Равенство натяжений. Для невесомой пружины второй закон Ньютона даёт: силы на её концах равны по модулю (масса ноль). То же для невесомых кусков нити и блока без трения. Значит, натяжение во всех сечениях одно, T, и по закону Гука

$$T = k\Delta_1 = 2k\Delta_2 = 3k\Delta_3 \quad \Rightarrow \quad \Delta_2 = \frac{\Delta_1}{2}, \quad \Delta_3 = \frac{\Delta_1}{3}.$$

2. Связь с перемещением блока. Длина каждой ветви от потолка до блока выросла на x (концы на потолке неподвижны, блок опустился на x; дуга на блоке не меняется). Нить не растягивается, поэтому сумма удлинений пружин равна $2x$:

$$\Delta_1 + \frac{\Delta_1}{2} + \frac{\Delta_1}{3} = 2x \quad \Rightarrow \quad \frac{11}{6}\Delta_1 = 2x, \qquad \Delta_1 = \frac{12}{11}x.$$



Удлинения пружин (пунктир — уровни до начала движения): точка A опускается на $\Delta_1 + \Delta_2$, блок — на x

3. Скорость точки A. Точка A висит под пружинами k и $2k$, верх пружины k закреплён. Поэтому смещение точки A равно сумме их удлине-

ний:

$$y_A = \Delta_1 + \Delta_2 = \frac{3}{2}\Delta_1 = \frac{3}{2}\cdot\frac{12}{11}x = \frac{18}{11}x.$$

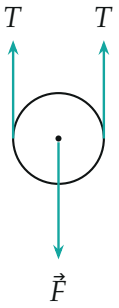
Связь верна в любой момент, и при $x = vt$ получаем $y_A = \frac{18}{11}vt$ — точка A движется равномерно со скоростью

$$v_A = \frac{18}{11}v,$$

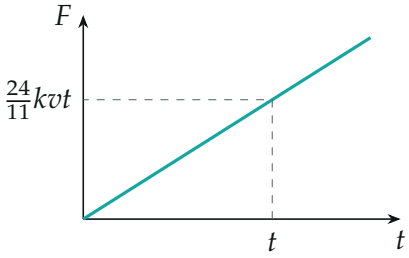
направленной вниз, как и скорость блока.

4. Сила. Запишем второй закон Ньютона для невесомого блока в проекции на ось y: вниз его тянет сила F, вверх — две ветви нити силами T каждая; масса нулевая, поэтому

$$F - 2T = 0, \qquad F = 2T = 2k\Delta_1 = 2k\cdot\frac{12}{11}vt = \frac{24}{11}kvt.$$



Силы на невесомый блок: $F = 2T$



Сила растёт линейно со временем: пружины всё сильнее растягиваются

Обратите внимание. Точка A движется быстрее блока: блок «вытягивает» по x из каждой ветви, а почти всё удлинение левой ветви достаётся мягким пружинам k и $2k$, которые стоят выше A.

Проверка. Размерность: $k \cdot v \cdot t$ — Н/м·м = Н. Второй способ для F: последовательное соединение трёх пружин эквивалентно одной с жёсткостью $k_э$, растянутой на $2x$:

$$\frac{1}{k_э} = \frac{1}{k} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{3k} = \frac{11}{6k}, \qquad T = k_э \cdot 2vt = \frac{12}{11}\,kvt, \qquad F = 2T = \frac{24}{11}\,kvt$$

— совпало. Предел: если бы пружина $3k$ была бесконечно жёсткой, удлинение $2x$ делили бы две левые пружины, и A опускалась бы со скоростью $2v$; у нас $\frac{18}{11}v < 2v$ — правая пружина забирает свою долю. Смысл: точка A и сила определяются только тем, как общее удлинение $2x$ делится между пружинами.

Ответ. $v_A = \frac{18}{11}\,v$ (вниз, постоянна); $F = \frac{24}{11}\,kvt$.