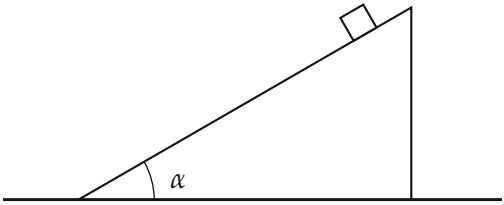
Тело на подвижном клине

Задача 4. [Росатом 2021/22, заключительный этап, 9 класс, задача 4] На горизонтальной поверхности находится гладкий клин с углом при основании $\alpha = 30°$, на нем тело. Клин двигают вправо с некоторым ускорением. Найти это ускорение, если время соскальзывания тела вдвое меньше времени соскальзывания с закрепленного клина? Ответ обосновать.

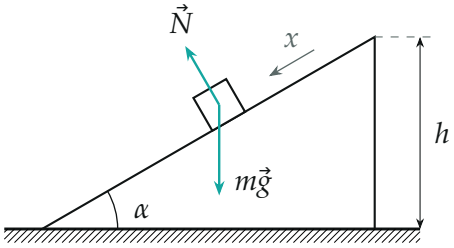


▲ **Решение.** **Что происходит.** На закреплённом клине тело скользит вдоль склона с ускорением $g\sin\alpha$. Если клин уезжает вправо, склон «уходит из-под тела», тело давит на него слабее и опускается быстрее. Время спуска вдвое меньше — а это ровно время свободного падения с той же высоты. Главная идея: тело должно падать с ускорением g, то есть клин не должен на него давить ($N = 0$); значит, клин успевает уходить из-под свободно падающего тела, и его ускорение находим из кинематической связи. Второй способ — в системе отсчёта клина с силой инерции.

Обозначения. h — начальная высота тела над столом, $l = h/\sin\alpha$ — путь вдоль склона, t_1 — время спуска с закреплённого клина, $t_2 = t_1/2$; a — ускорение клина (вправо); $\vec{N}$ — сила реакции склона.

1. Закреплённый клин. Второй закон Ньютона для тела в проекции на ось вдоль склона вниз: нормальная сила перпендикулярна оси и не входит, проекция mg равна $mg\sin\alpha$. Движение равноускоренное без начальной скорости:

$$a_1 = g\sin\alpha, \qquad l = \frac{a_1 t_1^2}{2} \quad\Rightarrow\quad t_1 = \sqrt{\frac{2l}{g\sin\alpha}} = \frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{2h}{g}} = 2\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$



Закреплённый клин: силы на тело и ось x вдоль склона

2. Чему равно новое время. По условию

$$t_2 = \frac{t_1}{2} = \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

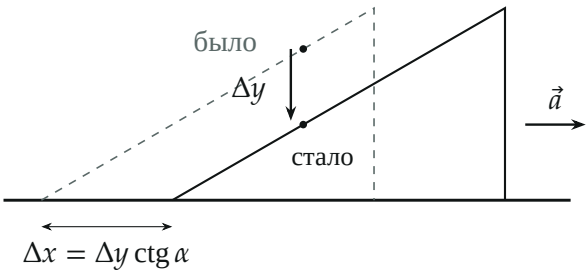
а это время свободного падения с высоты h. По вертикали тело может опускаться с ускорением не больше g: сила тяжести тянет вниз, а реакция склона $\vec{N}$ имеет вертикальную составляющую вверх. Значит, вертикальное ускорение равно g, $N = 0$, и тело падает по вертикали — горизонтальной силы на него тоже нет.

3. Кинематическая связь. Тело всё время касается склона (иначе это не соскальзывание), а падает вертикально. Пусть тело опустилось на Δy. Чтобы точка склона под ним опустилась на столько же, клин должен уехать вправо на

$$\Delta x = \Delta y \operatorname{ctg}\alpha.$$

Связь верна в любой момент, поэтому так же связаны скорости и ускорения:

$$a = g \operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{3}\,g \approx 17 \text{ м/с}^2.$$



Тело опускается на Δy, клин за это время уезжает на $\Delta x = \Delta y \operatorname{ctg}\alpha$ (пунктир — прежнее положение клина)

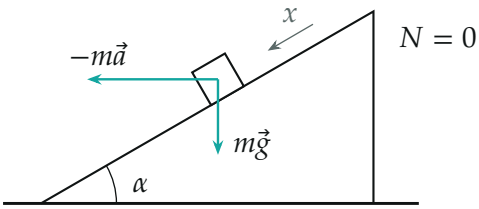
4. Второй способ: система отсчёта клина. В системе клина на тело кроме $m\vec{g}$ и $\vec{N}$ действует сила инерции $-m\vec{a}$ (влево). Тело скользит вдоль склона. Второй закон Ньютона в проекции на ось x вдоль склона вниз (сила N перпендикулярна оси и уходит) и на нормаль:

$$ma_{\text{отн}} = mg\sin\alpha + ma\cos\alpha, \qquad N = mg\cos\alpha - ma\sin\alpha.$$

Время спуска вдвое меньше, значит, при том же пути l ускорение в 4 раза больше: $a_{\text{отн}} = 4g\sin\alpha = 2g$. Отсюда

$$\frac{g}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}a = 2g \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{3}\,g,$$

и тогда $N = mg\cos\alpha - \sqrt{3}mg\sin\alpha = 0$ — тело действительно только касается склона, как и в первом способе.



В системе клина: сила тяжести и сила инерции; их сумма направлена вдоль склона, давления на склон нет

Обратите внимание. При ускорении клина больше $\sqrt{3}g$ тело оторвётся от склона и полетит вертикально вниз — это уже не соскальзывание; при меньшем время спуска больше $t_1/2$. Поэтому ответ единственный: ровно $\sqrt{3}g$.

Проверка. Размерность: $g\operatorname{ctg}\alpha$ — ускорение. Предел: при $a = 0$ формула первого уравнения пункта 4 даёт $a_{\text{отн}} = g\sin\alpha$, как на закреплённом клине. Смысл: клин должен «убегать» из-под тела так быстро, чтобы тело падало свободно, — вдоль горизонтали для этого нужно $g\operatorname{ctg}\alpha$, а пологий склон 30° требует ускорения больше g.

Ответ. $a = g\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{3}\,g \approx 17$ м/с^2, клин движется вправо.