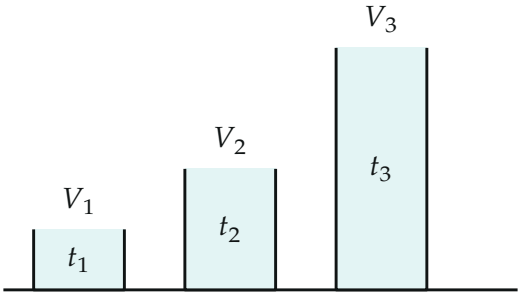
Нагрев воды в трёх сосудах

Задача 5. [Росатом 2021/22, заключительный этап, 9 класс, задача 5] На столе стоят три цилиндрических сосуда с одинаковой площадью дна. Объемы сосудов $V_1 = V$, $V_2 = 2V$, $V_3 = 4V$. Сосуды до краев заполнены водой. Воду в сосудах нагревают с помощью кипятильника, мощности которого не хватает для того, чтобы ее вскипятить. В первом сосуде воду удается нагреть до температуры $t_1 = 80\,^\circ\text{C}$, во втором — до температуры $t_2 = 60\,^\circ\text{C}$. До какой температуры удастся нагреть воду в третьем сосуде с помощью данного кипятильника? Считать, что теплоотдача пропорциональна разности температур воды и окружающей среды и площади контакта между ними. Комнатная температура $t_0 = 20\,^\circ\text{C}$, вода в сосудах прогревается равномерно.

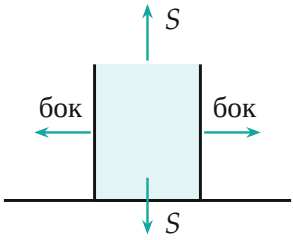


Поясняющий рисунок: дно одинаковое, высоты относятся как 1 : 2 : 4

▲ **Решение.** **Что происходит.** Вода нагревается, пока мощность кипятильника больше тепловых потерь. Потери растут с температурой, и устанавливается равновесие: мощность нагревателя P равна мощности теплоотдачи. Класс задачи — установившаяся температура при теплоотдаче, пропорциональной Δt и площади. Потери идут через дно и открытую поверхность (их площадь у всех сосудов одна) и через боковую стенку (её площадь пропорциональна высоте, то есть объёму). Два сосуда дают два уравнения на два неизвестных коэффициента, третий — ответ.

Обозначения. S — площадь дна (и поверхности воды), h — высота первого сосуда, у второго и третьего $2h$ и $4h$; α — коэффициент теплоотдачи (мощность на единицу площади и градус); $\Delta t_i = t_i - t_0$.

1. Площади. Дно плюс поверхность: $2S$ у всех. Боковая стенка: Πh, $2\Pi h$, $4\Pi h$ (Π — периметр дна). Обозначим $A = 2S$, $B = \Pi h$; тогда площади контакта $A + B$, $A + 2B$, $A + 4B$.



Тепло уходит через поверхность и дно (площадь $2S$) и через боковую стенку (площадь $\propto h$)

2. Уравнения теплового баланса. В установившемся режиме температура не меняется, поэтому вся мощность кипятильника уходит в окружающую среду:

$$P = \alpha(A + B)\Delta t_1, \qquad P = \alpha(A + 2B)\Delta t_2.$$

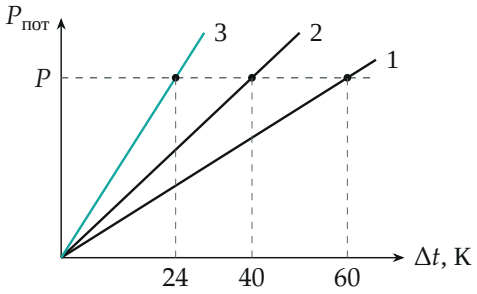
С $\Delta t_1 = 60$ K и $\Delta t_2 = 40$ K: $60(A + B) = 40(A + 2B)$, откуда $20A = 20B$, $A = B$. Тогда $P = \alpha \cdot 2A \cdot 60 = 120\,\alpha A$.

3. Третий сосуд.

$$P = \alpha(A+4B)\Delta t_3 = 5\alpha A\,\Delta t_3 \quad \Rightarrow \quad \Delta t_3 = \frac{120}{5} = 24\text{ K}, \qquad t_3 = 44\,^\circ\text{C}.$$

В общем виде, исключая A и B:

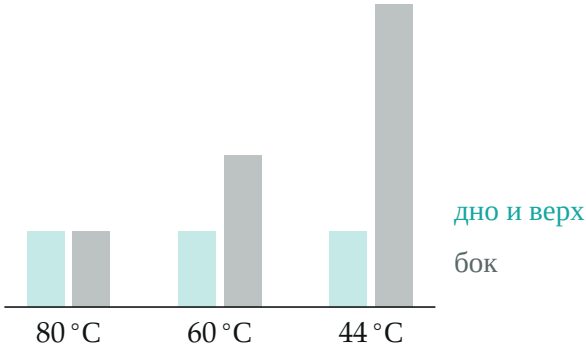
$$t_3 = t_0 + \frac{(t_1 - t_0)(t_2 - t_0)}{3t_1 - 2t_2 - t_0} = 20 + \frac{60 \cdot 40}{100} = 44\,^\circ\text{C}.$$



Мощность потерь $\alpha \cdot$ (площадь) $\cdot \Delta t$ для трёх сосудов (наклоны 2 : 3 : 5); равновесие — пересечение с мощностью кипятильника P

Обратите внимание. Нельзя считать, что потери пропорциональны только объёму: через дно и открытую поверхность уходит столько же, сколько через стенку первого сосуда ($A = B$). Данные первых двух сосудов как раз и нужны, чтобы найти это соотношение.

Проверка. Второй сосуд по найденным $A = B$: площадь $3A$, $\Delta t_2 = 120/3 = 40$ K — верно. Предел формулы: если бы все потери шли только через дно и поверхность ($B = 0$), было бы $t_1 = t_2$, и знаменатель $3t_1 - 2t_2 - t_0 = t_1 - t_0$ дал бы $t_3 = t_2$ — все три одинаковы, как и должно быть. Смысл: высокий сосуд теряет тепло через большую стенку, поэтому прогревается слабее.



Площади теплоотдачи в единицах A: дно и верх — всегда 1, бок — 1, 2, 4; чем больше полная площадь, тем ниже температура

Ответ. $t_3 = t_0 + \dfrac{(t_1 - t_0)(t_2 - t_0)}{3t_1 - 2t_2 - t_0} = 44\,^\circ\text{C}.$