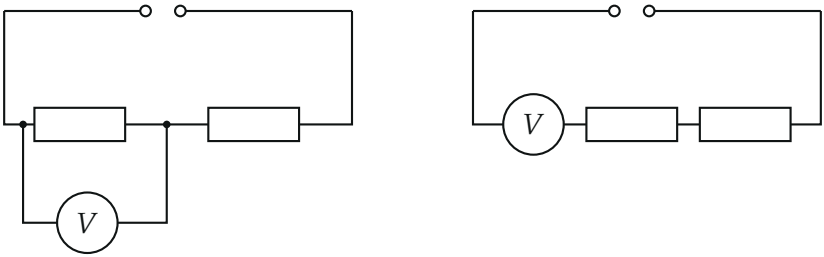
Вольтметр в цепи с резисторами

Задача 1. [Росатом 2022/23, отборочный этап, 10 класс, задача 1] Электрическая цепь, схема которой показана на левом рисунке, состоит из двух одинаковых резисторов и вольтметра и подключена к источнику постоянного напряжения. Когда вольтметр включают последовательно с резисторами (правый рисунок), его показания увеличиваются в $3/2$ раза. Найти отношение сопротивления резистора к сопротивлению вольтметра.



Слева — вольтметр параллельно первому резистору, справа — последовательно с обоими.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Вольтметр — не идеальный прибор: у него есть конечное сопротивление, и он сам пропускает ток. Включённый параллельно резистору, он «подтягивает» его сопротивление вниз и меняет цепь; включённый последовательно, он оказывается самым большим сопротивлением в цепи и забирает почти всё напряжение. Показание вольтметра — напряжение на нём самом, найдём его в обоих включениях и составим отношение. Главная идея — записать закон сохранения заряда для узла: ток через последовательный резистор делится между параллельными ветвями.

Обозначения. U — напряжение источника (постоянное, внутреннего сопротивления нет), r — сопротивление каждого резистора, R — сопротивление вольтметра, $x = r/R$ — искомое отношение. U_1 и U_2 — показания вольтметра в первом (слева) и во втором (справа) включениях; $U_2/U_1 = 3/2$.

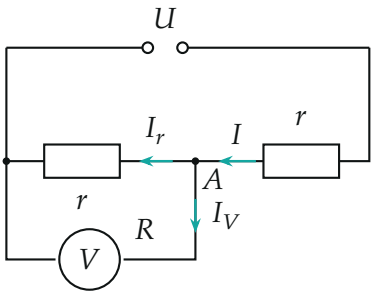
1. Включение слева. Вольтметр и левый резистор соединены параллельно: напряжение на каждом равно показанию U_1. Через правый резистор течёт общий ток I; на нём падает напряжение $U - U_1$ (сумма

напряжений на последовательных участках равна U). В узле ток I делится на ток через резистор U_1/r и ток через вольтметр U_1/R: закон сохранения заряда для узла A:

$$\frac{U-U_1}{r}=\frac{U_1}{r}+\frac{U_1}{R}.$$

Умножим на r и подставим $x=r/R$: $U-U_1=U_1+xU_1$, откуда

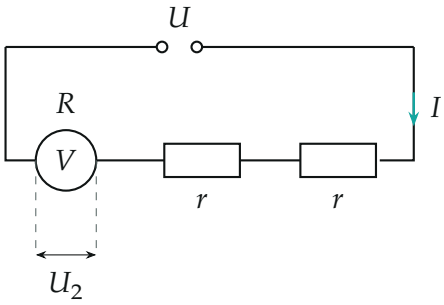
$$U_1=\frac{U}{2+x}.$$



Первое включение: ток I через правый резистор делится в узле на $I_r=U_1/r$ и $I_V=U_1/R$.

2. Включение справа. Все три элемента — резистор, резистор и вольтметр — соединены последовательно: ток один и тот же, $I=U_2/R$. Напряжение источника равно сумме напряжений на элементах:

$$U=U_2+2\,I\,r=U_2+2\,\frac{U_2}{R}\,r=U_2\,(1+2x),\qquad U_2=\frac{U}{1+2x}.$$

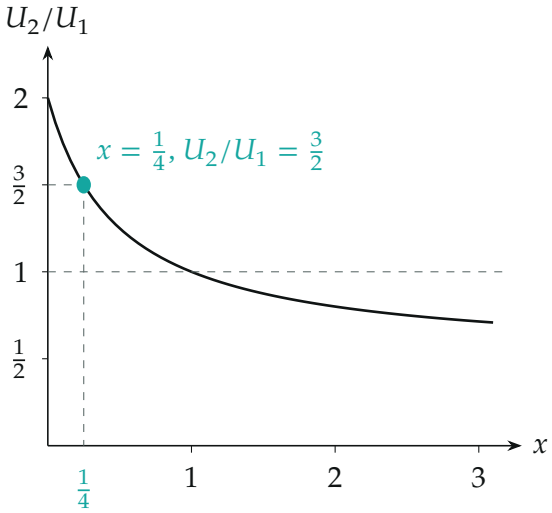


Второе включение: одна цепочка R, r, r с общим током I; вольтметр показывает $U_2 = IR$.

3. Отношение. Разделим результаты первого и второго пунктов:

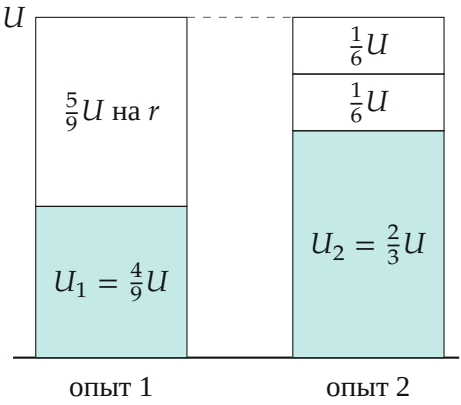
$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{2+x}{1+2x} = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad 4 + 2x = 3 + 6x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{4}.$$

Сопротивление вольтметра в четыре раза больше сопротивления резистора.



Отношение показаний $U_2/U_1 = (2+x)/(1+2x)$ как функция $x = r/R$ (график построен по точкам): от 2 при $x \to 0$ до $\frac{1}{2}$ при $x \to \infty$; значение $\frac{3}{2}$ достигается при $x = \frac{1}{4}$.

Проверка. Подставим $x = \frac{1}{4}$: $U_1 = U/\frac{9}{4} = \frac{4}{9}U$, $U_2 = U/\frac{3}{2} = \frac{2}{3}U$, и $U_2/U_1 = \frac{3}{2}$. Второй способ — через сопротивления: при $r = R/4$ параллельное соединение r и R даёт $R/5$; вместе с правым резистором общее сопротивление $R/4 + R/5 = 9R/20$, и по делителю напряжения $U_1 = U \cdot \dfrac{R/5}{9R/20} = \frac{4}{9}U$ — то же самое. Предел: для идеального вольтметра ($x \to 0$) показания были бы $U/2$ и U, отношение 2; конечное сопротивление вольтметра уменьшает отношение, и $\frac{3}{2} < 2$ — вывод согласуется.



Как делится напряжение U при $r = R/4$: показание вольтметра выросло с $\frac{4}{9}U$ до $\frac{2}{3}U$, в $\frac{3}{2}$ раза.

Смысл: в первом включении вольтметр шунтирует резистор, и на параллельный участок приходится меньше половины U; во втором он включён последовательно и «берёт на себя» две трети напряжения — чем меньше r/R, тем сильнее это различие.

Ответ. $r/R = 1/4$, то есть сопротивление вольтметра в 4 раза больше сопротивления резистора.