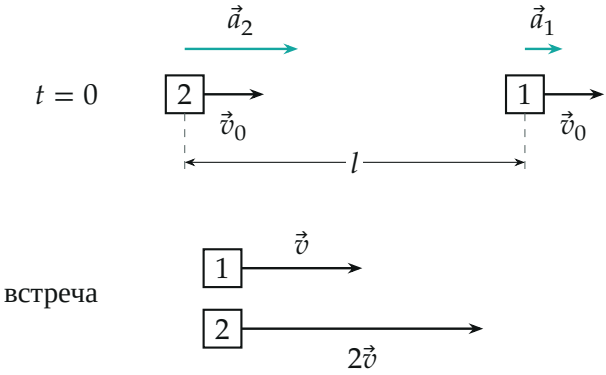
Два тела разгоняются навстречу

Задача 3. [Росатом 2022/23, отборочный этап, 10 класс, задача 3] Два тела движутся с одинаковыми скоростями вдоль одной прямой, находясь на некотором расстоянии друг от друга. Тела одновременно начинают ускоряться: переднее — с постоянным ускорением a_1, заднее — с постоянным ускорением a_2 ($a_2 > a_1$). В момент встречи тел их скорости равны v и $2v$. Найти скорость тел и расстояние между ними до начала ускорения.



Поясняющий рисунок: вверху — момент начала ускорения, внизу — момент встречи (тела условно разнесены по вертикали). Длины стрелок — для примера $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ (в м/с^2), $v = 2$ м/с.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Заднее тело ускоряется сильнее переднего, поэтому с каждой секундой его скорость относительно переднего растёт и в какой-то момент оно настигает переднее. В этот момент они находятся в одной точке, а скорости различаются вдвое. Из скоростей в момент встречи найдём время разгона и общую начальную скорость, из равенства координат — начальное расстояние. Главная идея — законы изменения скорости обоих тел записаны за одно и то же время t.

Обозначения. Ось x направим вдоль движения тел. v_0 — общая проекция начальной скорости; t — время от начала ускорения до встречи; l — начальное расстояние между телами. Проекции ускорений на ось положительны: тела именно ускоряются. Тело 1 — переднее, тело 2 — заднее.

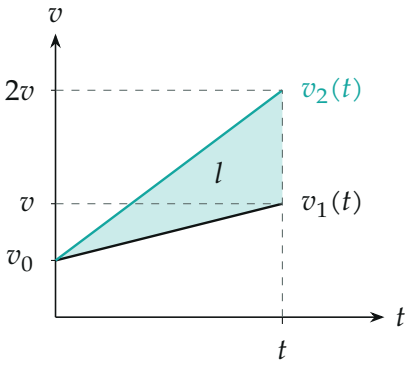
1. Какое тело быстрее в момент встречи. Скорость заднего тела относительно переднего $u(t) = (a_2 - a_1)\,t$ в начале равна нулю и растёт, потому что $a_2 > a_1$. Чтобы заднее тело догнало переднее, его скорость в момент встречи должна быть больше. Значит, при встрече у тела 1 скорость v, у тела 2 скорость $2v$.

2. Скорости в момент встречи. Движение каждого тела равноускоренное, закон изменения скорости в проекции на ось x:

$$v = v_0 + a_1 t, \qquad 2v = v_0 + a_2 t.$$

Вычтем первое уравнение из второго: $v = (a_2 - a_1)\,t$, откуда

$$t = \frac{v}{a_2 - a_1}, \qquad v_0 = v - a_1 t = v - \frac{a_1 v}{a_2 - a_1} = \frac{(a_2 - 2a_1)\,v}{a_2 - a_1}.$$



Графики скоростей обоих тел (для примера $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $v = 2$): наклоны a_1 и a_2, в момент встречи $v_1 = v$, $v_2 = 2v$. Заштрихованный треугольник между графиками равен расстоянию l.

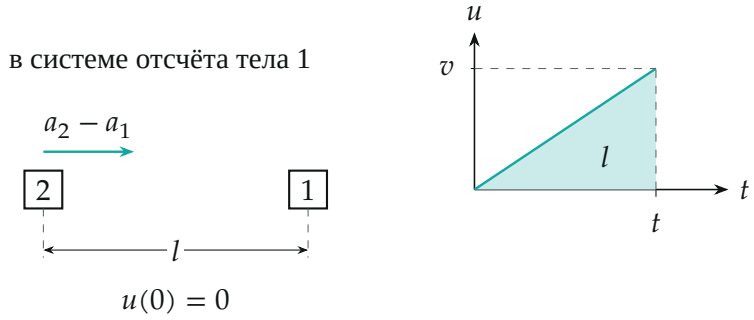
3. Начальное расстояние. К моменту встречи заднее тело пройдёт на l больше переднего: тела оказались в одной точке, а в начале заднее было позади на l. Пути за время t:

$$s_1 = v_0 t + \frac{a_1 t^2}{2}, \qquad s_2 = v_0 t + \frac{a_2 t^2}{2}, \qquad s_2 - s_1 = l.$$

Слагаемые $v_0 t$ сокращаются: общая начальная скорость не влияет на расстояние между телами, только на путь каждого. Получаем

$$l = \frac{(a_2 - a_1)\,t^2}{2} = \frac{(a_2 - a_1)}{2} \cdot \frac{v^2}{(a_2 - a_1)^2} = \frac{v^2}{2\,(a_2 - a_1)}.$$

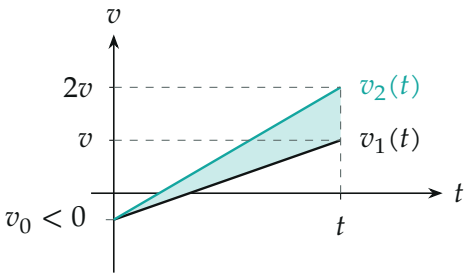
Тот же результат даёт площадь треугольника между графиками скорости на рисунке выше: $\frac{1}{2}\,t \cdot (2v - v) = \frac{1}{2}\,vt$.



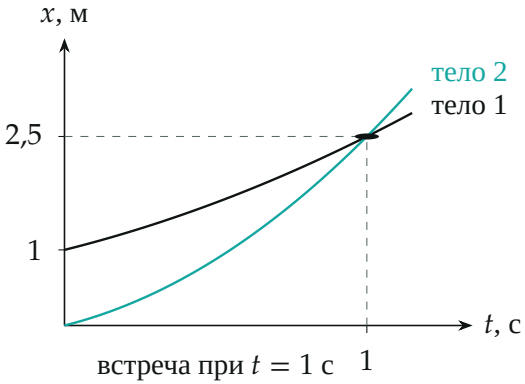
Второй способ — в системе отсчёта переднего тела: заднее стартует из покоя на расстоянии l и разгоняется с ускорением $a_2 - a_1$; к моменту встречи его скорость $u = v$, а путь l равен площади под графиком.

Обратите внимание: формула для v_0 даёт неотрицательную скорость только при $a_2 \geq 2a_1$. При $a_2 = 2a_1$ тела стартуют из покоя ($v_0 = 0$). При $a_1 < a_2 < 2a_1$ выходит $v_0 < 0$: до начала ускорения оба тела двигались против оси x и сначала тормозили, и разворачивались — решение остаётся верным, проекция скорости просто отрицательна (график ниже).

Проверка. Размерность: v_0 — скорость; v^2/a — метры. Предел: если заднее тело разгоняется очень быстро ($a_2 \to \infty$), то $t \to 0$, $v_0 \to v$ и $l \to 0$ — тела почти сразу оказываются рядом, как и должно быть. Числовой пример $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $v = 2$ (в единицах СИ): $t = 1$, $v_0 = 1$, $l = 1$; координаты в момент встречи $x_1 = l + v_0 t + \frac{a_1 t^2}{2} = 1 + 1 + 0{,}5 = 2{,}5$ и $x_2 = v_0 t + \frac{a_2 t^2}{2} = 1 + 1{,}5 = 2{,}5$ совпадают, скорости $1 + 1 \cdot 1 = 2$ и $1 + 3 \cdot 1 = 4$ — как и требуется.



Случай $a_2 < 2a_1$ (для примера $a_1 = 1{,}5$, $a_2 = 2{,}5$, $v = 1$; тогда $v_0 = -0{,}5$): оба тела начинают с отрицательной скоростью, к моменту встречи скорости v и $2v$ — по-прежнему положительные.



Числовой пример ($a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $v = 2$): координаты тел как функции времени; кривые пересекаются при $t = 1$ с в точке $x = 2{,}5$ м. В начале заднее тело в $x = 0$, переднее в $x = l = 1$ м.

Ответ. Скорость тел до начала ускорения $v_0 = \dfrac{(a_2 - 2a_1)\,v}{a_2 - a_1}$; расстояние между телами $l = \dfrac{v^2}{2\,(a_2 - a_1)}$.