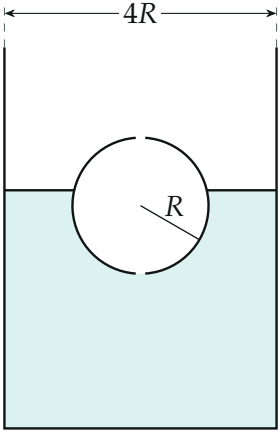
Шар с отверстиями в воде

Задача 4. [Росатом 2022/23, отборочный этап, 10 класс, задача 4] Тонкостенный шар радиуса R, имеющий малые отверстия внизу и вверху, плавает в высоком цилиндрическом сосуде с водой радиуса $2R$, погрузившись в воду на две трети своего объёма, при этом воды в шаре нет. Вода начинает медленно поступать в шар через нижнее отверстие, вытесняя воздух через верхнее. Каким будет уровень воды в сосуде, когда (а) шар заполнится водой наполовину, (б) полностью заполнится водой?



Начальное состояние, в масштабе: сосуд радиусом $2R$, шар радиусом R погружён на $2/3$ объёма (глубина погружения $\approx 1{,}23R$).

▲ **Решение. Что происходит.** Пока шар плавает, вода, вошедшая в него, — это груз: шар опускается ровно настолько, чтобы выросшая сила Архимеда уравновесила вес зашедшей воды. Поэтому объём погружённой части растёт на столько же, на сколько прибавилось воды внутри шара, и «занятый объём» под уровнем в сосуде не меняется — уровень стоит. Когда шар уходит под воду целиком, он больше не может «просесть» глубже: добавочная вода внутри делает его тяжелее вытесняемой воды, и он тонет. С этого момента объём вытесненной воды остаётся равным V, а воды внутри шара становится больше — уровень в сосуде падает. Главная идея — следить за объёмом, который занимают под уровнем вода, воздух в погружённой части шара и сам шар.

Обозначения. $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ — объём шара, m — масса оболочки, ρ — плотность воды, $S = \pi(2R)^2 = 4\pi R^2$ — площадь сечения сосуда, V_1 — объём воды внутри шара, h — уровень воды в сосуде, h_0 — начальный уровень, W — весь объём воды (в сосуде и в шаре вместе); он не меняется. Толщиной оболочки и отверстиями пренебрегаем.

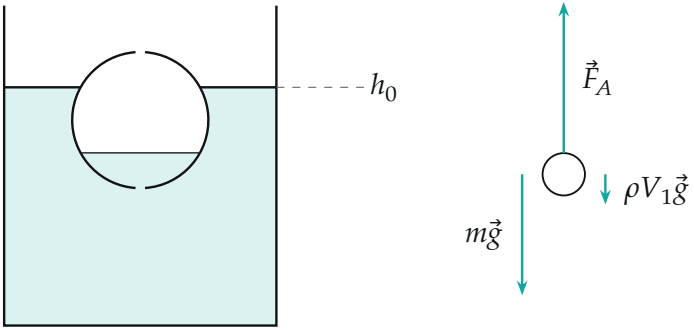
1. Начальное равновесие. Шар плавает, воды в нём нет. Сила тяжести оболочки равна силе Архимеда для погружённых $\frac{2}{3}V$:

$$mg = \rho g \cdot \tfrac{2}{3}V \quad \Rightarrow \quad m = \tfrac{2}{3}\rho V.$$

2. Шар плавает, внутри уже V_1 воды. Рассмотрим систему «оболочка + вода внутри неё». Внешние силы: сила тяжести $(m + \rho V_1)g$ и давление окружающей воды на внешнюю поверхность оболочки — вместе они дают силу Архимеда $\rho g V_\text{п}$, где $V_\text{п}$ — объём погружённой части шара (отверстия малы, давлением на них пренебрегаем). Вода вливается медленно, поэтому система в каждый момент в равновесии:

$$(m + \rho V_1)\, g = \rho g\, V_\text{п} \quad \Rightarrow \quad V_\text{п} = \tfrac{2}{3}V + V_1.$$

Объём погружённой части вырос на $\Delta V = V_1$ — ровно на объём воды, вошедшей в шар.



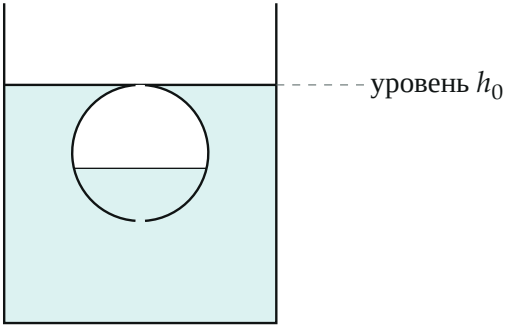
Шар плавает, внутри $V_1 = V/6$ воды (пример): погружённый объём $\frac{5}{6}V$. Справа — силы на систему «оболочка + вода внутри» в масштабе ($mg : \rho V_1 g : F_A = 4 : 1 : 5$); точки приложения разнесены по горизонтали для наглядности, все силы действуют вдоль вертикали.

3. Уровень, пока шар плавает. Область под уровнем h состоит из воды (всей, W) и воздуха внутри погружённой части шара, то есть $V_\text{п} - V_1$ (оболочка тонкая, её объёмом пренебрегаем):

$$S\,h = W + (V_\text{п} - V_1) = W + \tfrac{2}{3}V.$$

Правая часть от V_1 не зависит: пока шар плавает, уровень не меняется, $h = h_0$.

4. Когда шар тонет. Шар плавает, пока погружённый объём не превышает V: $\frac{2}{3}V + V_1 \le V$, то есть $V_1 \le \frac{1}{3}V$. При $V_1 = \frac{1}{3}V$ шар весь под водой, его верх на уровне поверхности. Дальше $(m + \rho V_1)g > \rho g V$: сила тяжести шара с водой больше силы Архимеда для полностью погружённого шара, и шар опускается на дно.



Предельное состояние $V_1 = V/3$ (в масштабе): шар полностью погружён, внутри $1/3$ объёма воды, уровень не изменился.

5. Уровень после погружения. Теперь под уровнем лежит вся оболочка: погружённый объём $V_\text{п} = V$, воздуха внутри $V - V_1$:

$$S\,h = W + (V - V_1).$$

Вычтем равенство $S\,h_0 = W + \frac{2}{3}V$ (пункт 3): изменение уровня

$$\Delta h = h - h_0 = -\frac{V_1 - V/3}{S}, \qquad V_1 \ge \tfrac{1}{3}V.$$

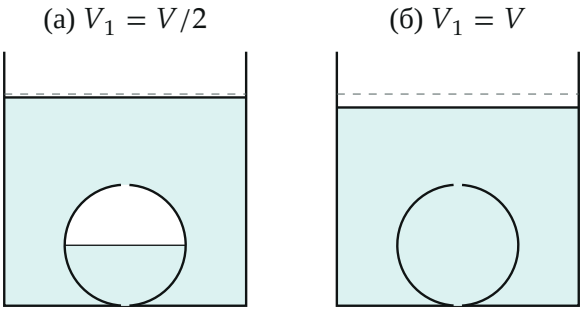
Уровень понижается: вода, которая была в сосуде, ушла в шар, а вытесняемый объём V перестал расти.

(а) Шар наполовину заполнен ($V_1 = \frac{1}{2}V$):

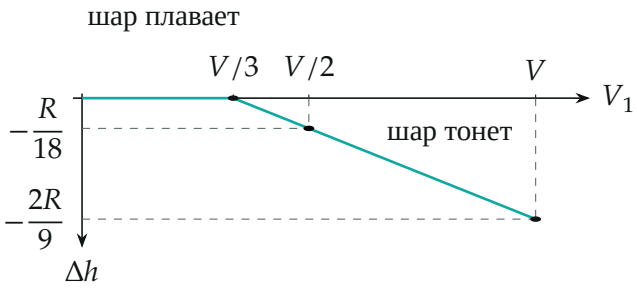
$$\Delta h = -\frac{V/6}{S} = -\frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3}{4\pi R^2} = -\frac{R}{18}.$$

(б) Шар заполнен полностью ($V_1 = V$); оба понижения отсчитываются от h_0:

$$\Delta h = -\frac{2V/3}{S} = -\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3}{4\pi R^2} = -\frac{2R}{9}.$$



Шар на дне, в масштабе; пунктир — начальный уровень h_0 (в случае (а) понижение $R/18 \approx 0{,}06R$ почти не видно).



Изменение уровня как функция объёма воды в шаре (график построен по точкам): до $V/3$ уровень не меняется, затем линейно падает; точки $V_1 = V/2$ и $V_1 = V$ — ответы (а) и (б).

Обратите внимание: формулы пункта 5 предполагают, что шар на дне остаётся целиком под водой, то есть $h_0 - \frac{2}{9}R \geq 2R$, $h_0 \geq \frac{20}{9}R$. Сосуд «высокий» именно для этого; иначе верхняя часть шара торчала бы над водой, и считать надо было бы иначе.

Проверка. Размерность: V/S — длина. Предел: при $V_1 = V/3$ обе формулы дают $\Delta h = 0$: график непрерывен, шар как раз вот-вот утонет. Второй способ для плавающего шара — по давлению на дно: сила давления воды на дно равна весу всего, что в сосуде, и оболочки, которую вода держит: $\rho g h S = \rho g W + mg$, откуда $h = \dfrac{W + \frac{2}{3}V}{S}$ — то же значение, не зависящее от V_1.

Смысл: пока шар плавает, его вес воспринимает вода — вошедшая в шар вода «подпирает» уровень ровно так же, как раньше подпирал воздух. Утонувшему шару опора — дно, и всё, что он больше не вытесняет, освобождает место: поэтому уровень падает.

Ответ. Уровень воды в сосуде ниже начального: (а) на $\Delta h = \dfrac{R}{18}$; (б) на $\Delta h_1 = \dfrac{2R}{9}$.