Кубики и нить

Задача 5. [Росатом 2022/23, отборочный этап, 10 класс, задача 5] Друг на друга поставили два одинаковых кубика массой M (см. рисунок). Затем нижний кубик жёстко закрепили на поверхности, а к серединам рёбер кубиков в точках A и B прикрепили невесомую нить, за середину которой тянут с медленно возрастающей силой F. При каких значениях коэффициента трения μ между кубиками верхний кубик начнёт скользить, а при каких опрокинется? Угол ACB равен 2α.

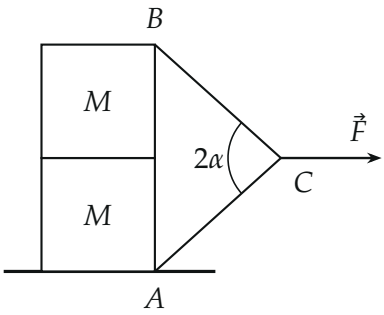


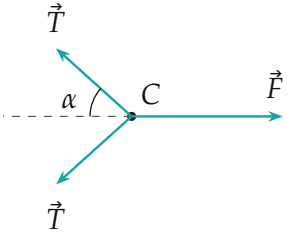
Рисунок условия. Нить ACB закреплена в нижнем правом ребре нижнего кубика (A) и в верхнем правом ребре верхнего (B); нижний кубик закреплён.

▲ **Решение. Что происходит.** Нить тянет верхний кубик за верхнее ребро вправо и немного вниз. Пока F мала, кубик покоится: трение держит его от сдвига, а момент силы тяжести — от переворота. При росте F какое-то из двух условий нарушится раньше: либо сдвигающая сила превысит максимальную силу трения (кубик поедет), либо момент силы натяжения превысит момент силы тяжести относительно нижнего правого ребра (кубик начнёт переворачиваться). Найдём значение F для каждого события; первым наступит то, где F меньше. От μ зависит только условие скольжения.

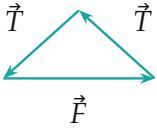
Обозначения. a — ребро кубика, T — натяжение нити, N — сила реакции нижнего кубика на верхний, $F_{\text{тр}}$ — сила трения покоя, O — нижнее правое ребро верхнего кубика. Ось x направим вправо, ось y — вверх.

1. Натяжение нити. Рассмотрим узел C — точку нити, за которую тянут. Нить невесомая, тянут за её середину, и обе её половины расположены симметрично относительно горизонтали F: натяжение T в них одинаково. Проекции на ось y взаимно уничтожаются, на ось x:

$$F = 2T\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad T = \frac{F}{2\cos\alpha}.$$



силы на узел C



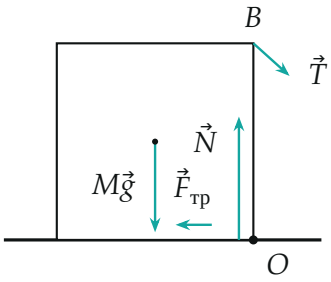
сумма сил равна нулю

Узел C: сила F уравновешена двумя натяжениями; справа те же векторы в треугольник, откуда $F = 2T\cos\alpha$. Длины стрелок — в масштабе для $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}9$.

2. Силы на верхний кубик. Нить действует на кубик в точке B с силой T вдоль BC: вправо и вниз, с проекциями $T\cos\alpha$ (вправо) и $T\sin\alpha$ (вниз). Кроме неё — сила тяжести Mg в центре, реакция N вверх и сила трения $F_{\text{тр}}$ влево (она мешает сдвигу вправо). Пока кубик покоится и не вращается:

$$\text{ось } x: \ T\cos\alpha = F_{\text{тр}}, \qquad \text{ось } y: \ N = Mg + T\sin\alpha.$$

Обратите внимание: вертикальная составляющая нити прижимает кубик — она увеличивает N, а значит и предельную силу трения.



Силы на верхний кубик перед началом движения (в масштабе для $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}9$, $F = 0{,}8\,Mg$, $\mu \geq 0{,}3$*): реакция* N *приложена правее центра — смещена к ребру* O.

3. Скольжение. Кубик начнёт скользить, когда сила трения покоя достигнет максимума μN:

$$T\cos\alpha = \mu\,(Mg + T\sin\alpha) \quad \Rightarrow \quad \frac{F}{2} = \mu\Big(Mg + \frac{F}{2}\operatorname{tg}\alpha\Big),$$

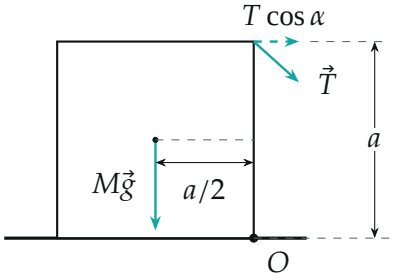
$$F_{ск} = \frac{2\mu Mg}{1 - \mu\operatorname{tg}\alpha}.$$

Выражение имеет смысл при $\mu\operatorname{tg}\alpha < 1$; при $\mu\operatorname{tg}\alpha \geq 1$ прижимающая составляющая растёт быстрее сдвигающей, и скольжения нет при любой силе.

4. Опрокидывание. К началу переворота кубик опирается только на ребро O, поэтому N и $F_{тр}$ приложены в O. Запишем правило моментов относительно оси, проходящей через O, — тогда моменты неизвестных N и $F_{тр}$ равны нулю. Момент $T\sin\alpha$ тоже нулевой: линия действия этой составляющей проходит через O. Остаются $T\cos\alpha$ с плечом a (расстояние от O до B по вертикали) и Mg с плечом $a/2$. Опрокидывание начинается, когда момент нити сравнивается с моментом тяжести:

$$T\cos\alpha \cdot a = Mg \cdot \frac{a}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{F}{2} = \frac{Mg}{2} \quad \Rightarrow \quad F_{оп} = Mg.$$

Опрокидывание не зависит ни от μ, ни от α.



Момент относительно ребра O: сила $T\cos\alpha$ вращает кубик по часовой стрелке с плечом a, сила тяжести — против, с плечом $a/2$ (в масштабе: $F = Mg$). Силы N, $F_{тр}$ и $T\sin\alpha$ проходят через O.

Тот же результат — вторым способом, через моменты относительно центра кубика. Реакция N приложена на расстоянии x_N от центра по горизонтали; сумма моментов равна нулю:

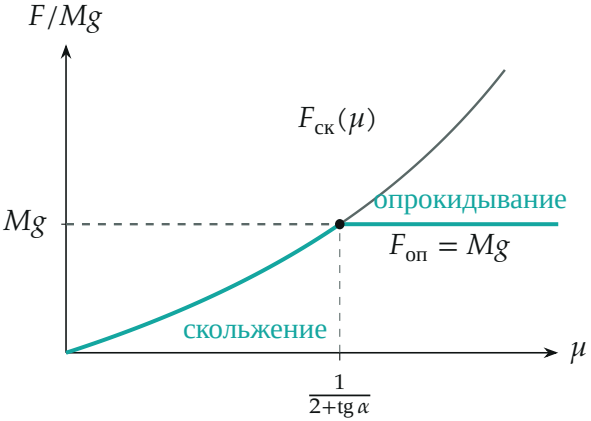
$$N\,x_N = T\cos\alpha\cdot\frac{a}{2} + F_{\text{тр}}\cdot\frac{a}{2} + T\sin\alpha\cdot\frac{a}{2} = T\cos\alpha\cdot a + T\sin\alpha\cdot\frac{a}{2}$$

(учтено $F_{\text{тр}} = T\cos\alpha$). Подставим $N = Mg + T\sin\alpha$ и потребуем, чтобы реакция дошла до самого ребра, $x_N = a/2$: слагаемые с $T\sin\alpha$ сокращаются, остаётся $Mg\cdot a/2 = T\cos\alpha\cdot a$, то есть $T\cos\alpha = Mg/2$ — то же $F = Mg$.

5. Что наступит первым. Скольжение произойдёт раньше опрокидывания, если для него нужна меньшая сила, $F_{\text{ск}} < F_{\text{оп}}$:

$$\frac{2\mu Mg}{1-\mu\operatorname{tg}\alpha} < Mg \quad\Leftrightarrow\quad 2\mu < 1-\mu\operatorname{tg}\alpha \quad\Leftrightarrow\quad \mu < \frac{1}{2+\operatorname{tg}\alpha}.$$

При $\mu \geq 1/(2+\operatorname{tg}\alpha)$ раньше (или одновременно, при равенстве) достигается $F = Mg$, и кубик опрокидывается; в этой области условие скольжения выполнилось бы при большей силе или не выполнилось бы вовсе.



Сила, при которой что-то случится первым (бирюзовая линия), как функция μ (для $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}9$): кривая $F_{ск}(\mu)$ растёт, пока не упрётся в уровень Mg; точка пересечения — $\mu = 1/(2+\operatorname{tg}\alpha) \approx 0{,}34$.

Проверка. Размерность: μ и $\operatorname{tg}\alpha$ безразмерны. Предел $\alpha \to 0$: нить горизонтальна, $T = F/2$, она тянет кубик за верхнее ребро; скольжение при $F = 2\mu Mg$, опрокидывание при $F = Mg$, граница $\mu = 1/2$ — совпадает с $1/(2+0)$. Число для $\operatorname{tg}\alpha = 1$: граница $\mu^* = 1/3$. При $\mu = 0{,}3$ имеем $F_{ск} = 0{,}6/0{,}7\,Mg \approx 0{,}86\,Mg < Mg$ — кубик скользит; при $\mu = 0{,}4$ имеем $F_{ск} = 0{,}8/0{,}6\,Mg \approx 1{,}33\,Mg > Mg$ — кубик опрокидывается.

Смысл: сила трения растёт вместе с прижимом, но чем больше $\operatorname{tg}\alpha$, тем сильнее нить прижимает кубик вниз, и граница смещается к меньшим μ — кубику легче перевернуться, чем сдвинуться.

Ответ. Кубик скользит при $\mu < \dfrac{1}{2+\operatorname{tg}\alpha}$ (при $F = \dfrac{2\mu Mg}{1-\mu\operatorname{tg}\alpha}$) и опрокидывается при $\mu \geq \dfrac{1}{2+\operatorname{tg}\alpha}$ (при $F = Mg$).