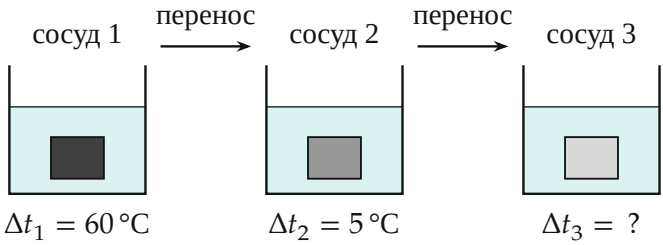
Деталь в трёх сосудах с маслом

Задача 1. [Росатом 2022/23, отборочный этап, 10 класс, задача 1] При закалке стальных деталей проводится следующая процедура. Имеются три одинаковых сосуда с маслом при одной и той же температуре. Горячую деталь опускают в первый сосуд, и после установления теплового равновесия температура масла в нём повышается на $\Delta t_1 = 60\,°\text{C}$. После этого деталь переносят во второй сосуд, и после установления теплового равновесия температура масла в нём повышается на $\Delta t_2 = 5\,°\text{C}$. После этого деталь переносят в третий сосуд. Насколько повысится температура масла в нём, когда наступит тепловое равновесие? Какой была первоначальная температура детали, если комнатная температура составляет $t_0 = 20\,°\text{C}$? Сосуды теплоизолированы.



Поясняющий рисунок к условию: деталь (серый прямоугольник, тем темнее, чем горячее) последовательно опускают в три одинаковых сосуда с маслом.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Каждый раз деталь отдаёт тепло маслу ровно того сосуда, куда её опустили, и они приходят к общей температуре; сосуды теплоизолированы, потери нет. Масло во всех сосудах в начале имеет температуру t_0 (сосуды одинаковые), деталь же приходит в каждый следующий сосуд уже остывшей. Главная идея: в каждом сосуде избыток температуры детали над маслом t_0 делится на две части — масло забирает долю $k = C/(C + C_0)$ этого избытка, одинаковую для всех сосудов. Поэтому повышения температуры масла образуют геометрическую прогрессию.

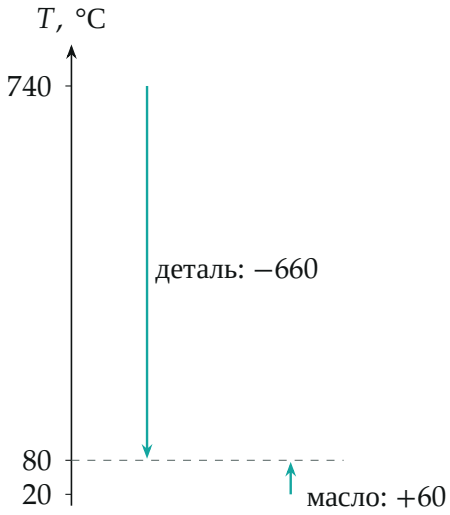
Обозначения. C — теплоёмкость детали, C_0 — теплоёмкость сосуда с маслом (одинаковая у всех трёх), t — начальная температура детали.

После установления равновесия в n-м сосуде деталь и масло имеют одну температуру $t_0 + \Delta t_n$. Введём избыток над комнатной температурой: $\varepsilon_0 = t - t_0$ — до первого сосуда, $\varepsilon_n = \Delta t_n$ — после n-го. Тогда ε_n — одновременно и повышение температуры масла в n-м сосуде, и избыток температуры детали после него.

1. Тепловой баланс в n-м сосуде. В сосуд опускают деталь с температурой $t_0 + \varepsilon_{n-1}$ (масло — t_0); в конце равновесная температура $t_0 + \varepsilon_n$. Теплоту, полученную маслом, приравниваем к теплоте, отданной деталью (система «деталь + сосуд» теплоизолирована):

$$C_0\,\varepsilon_n = C\,(\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n) \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_n = k\,\varepsilon_{n-1}, \qquad k = \frac{C}{C + C_0}.$$

Обратите внимание: избыток детали над маслом при опускании во второй сосуд — это Δt_1, а не $t - t_0$: деталь уже остыла до $t_0 + \Delta t_1$. Поэтому в каждом следующем сосуде в формулу входит предыдущее повышение.



Первый сосуд в масштабе температур: деталь остыла с 740 °C до 80 °C, масло нагрелось с 20 °C до 80 °C; длины стрелок относятся как 11 : 1 — обратно теплоёмкостям.

2. Три повышения. Формула $\varepsilon_n = k\varepsilon_{n-1}$ верна для каждого n с одним и тем же k. Из первых двух сосудов находим его: $\Delta t_2 = k\,\Delta t_1$, то есть

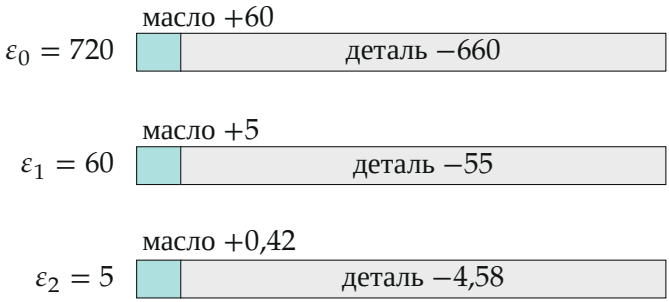
$$k = \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} = \frac{5}{60} = \frac{1}{12} \quad \Rightarrow \quad C_0 = 11\,C.$$

Для третьего сосуда $\Delta t_3 = k\,\Delta t_2$:

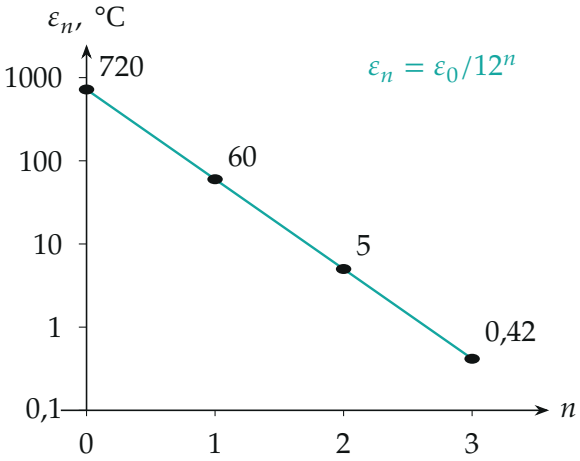
$$\Delta t_3 = \frac{\Delta t_2^2}{\Delta t_1} = \frac{25}{60}\,^\circ\text{C} \approx 0{,}42\,^\circ\text{C}.$$

3. Начальная температура детали. Для первого сосуда $\Delta t_1 = k\,\varepsilon_0 = k\,(t - t_0)$, откуда

$$t - t_0 = \frac{\Delta t_1}{k} = \frac{\Delta t_1^2}{\Delta t_2} = \frac{3600}{5}\,^\circ\text{C} = 720\,^\circ\text{C}, \qquad t = t_0 + 720\,^\circ\text{C} = 740\,^\circ\text{C}.$$

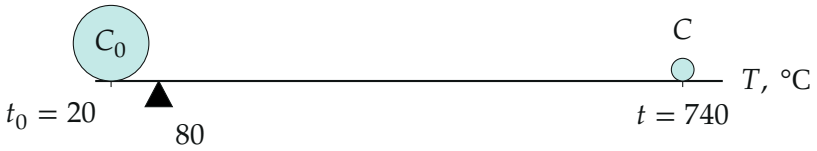


Как делится избыток температуры в каждом сосуде (всё в °C): масло получает $1/12$ длины полосы, деталь отдаёт $11/12$. Полосы нарисованы в одном масштабе по длине, чтобы доля была видна; сами числа убывают в 12 раз от сосуда к сосуду.



Избыток ε_n в логарифмическом масштабе (график построен по точкам): точки 720, 60, 5, 0,42 ложатся на прямую — геометрическая прогрессия со знаменателем $1/12$.

Проверка. Размерность: все величины — температуры. Подстановка: из $k = 1/12$ следует $C_0 = 11C$, и тепловой баланс сходится на каждом шаге. Первый сосуд: масло получило $11C \cdot 60 = 660\,C$, деталь отдала $C\,(740 - 80) = 660\,C$. Второй: $11C \cdot 5 = 55\,C$ и $C\,(80 - 25) = 55\,C$. Третий: $11C \cdot \frac{25}{60} \approx 4{,}58\,C$ и $C\,(25 - 20{,}42) \approx 4{,}58\,C$. Второй способ — по «рычагу» теплоёмкостей: температура равновесия в первом сосуде — среднее, взвешенное теплоёмкостями, $\dfrac{C_0 t_0 + Ct}{C_0 + C} = \dfrac{11 \cdot 20 + 740}{12} = 80\,°\text{C}$ — как и должно быть.



Равновесная температура в первом сосуде — «центр тяжести» двух температур с весами $C_0 = 11C$ и C (площади кружков пропорциональны теплоёмкостям); опора — в точке 80 °C.

Смысл: деталь в сосуде с маслом, теплоёмкость которого в 11 раз больше, отдаёт почти весь избыток температуры, но не весь, поэтому

в следующих сосудах нагрев масла всё слабее и слабее — в 12 раз от сосуда к сосуду.

Ответ. Температура масла в третьем сосуде повысится на $\Delta t_3 = \dfrac{\Delta t_2^2}{\Delta t_1} \approx 0{,}42\,^\circ\text{C}$; первоначальная температура детали $t = t_0 + \dfrac{\Delta t_1^2}{\Delta t_2} = 740\,^\circ\text{C}$.