Льдинки на нитях в сообщающихся сосудах

Задача 3. [Росатом 2022/23, отборочный этап, 10 класс, задача 3] Имеются два цилиндрических сообщающихся сосуда с площадью S и $2S$. В сосудах находятся две одинаковые льдинки, которые привязаны невесомыми нитями ко дну сосуда в меньшем сосуде и к потолку в большем (см. рисунок). Известно, что силы натяжения нитей одинаковы и равны $T = 1$ Н. Льдинки тают. Изменится ли уровень воды в сосудах, и если да, то насколько? Будет ли течь вода по трубке, соединяющей сосуды, в процессе таяния льдинок, и если да, то каков объём протёкшей воды? Плотность воды $\rho_0 = 1000$ кг/м^3, плотность льда $\rho = 900$ кг/м^3, $S = 30$ см^2, $g = 10$ м/с^2.

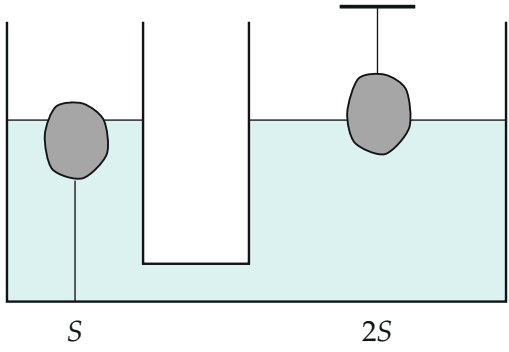


Рисунок условия: слева льдинка на нити ко дну, справа — на нити к перекладине над сосудом (потолок); сосуды соединены трубкой у дна.

▲ **Решение. Что происходит.** Свободно плавающая льдинка вытесняет объём воды, равный объёму воды, в которую она превратится, поэтому её таяние уровень не меняет. Здесь льдинки удерживают нити. В малом сосуде нить тянет льдинку вниз, и она погружена глубже, чем свободная: вытесняемый объём больше объёма воды из растаявшей льдинки. В большом сосуде нить тянет вверх, и льдинка погружена меньше свободной. Так как натяжения одинаковы, «лишний» объём в одном сосуде в точности равен «недостающему» в другом. Общий уровень не меняется, а вода перетекает из одного сосуда в другой. Главная идея — записать объём погружённой части каждой льдинки через условие её равновесия.

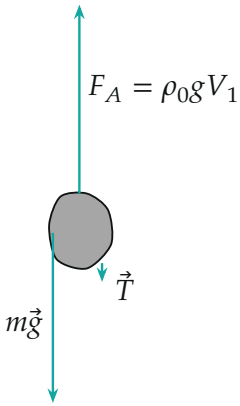
Обозначения. m — масса каждой льдинки, V_1 и V_2 — объёмы погружённых частей льдинок в малом и в большом сосуде, $V_в = m/\rho_0$ — объём воды, которая получится при таянии одной льдинки (масса воды равна m), $\Delta V = T/(\rho_0 g)$. Ось y направим вверх.

1. Малый сосуд. Льдинка покоится. Нить тянет её вниз, поэтому на неё действуют сила тяжести mg и сила натяжения T вниз и сила Архимеда вверх. Условие равновесия в проекции на ось y:

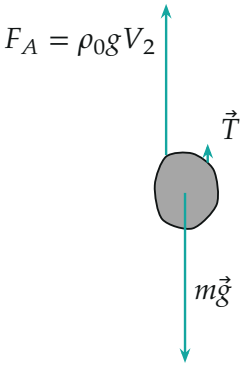
$$mg + T = \rho_0 g\, V_1 \quad \Rightarrow \quad V_1 = \frac{m}{\rho_0} + \frac{T}{\rho_0 g} = V_в + \Delta V.$$

2. Большой сосуд. Нить тянет льдинку вверх: сила тяжести вниз, а Архимеда и натяжение — вверх:

$$mg = T + \rho_0 g\, V_2 \quad \Rightarrow \quad V_2 = V_в - \Delta V.$$



малый сосуд: нить вниз



большой сосуд: нить вверх

Силы на льдинки (в масштабе для примера $m = 0{,}9$ кг: $mg = 9$ Н, $T = 1$ Н, $F_A = 10$ Н слева и 8 Н справа); стрелки разнесены по горизонтали для наглядности.

3. Общий уровень не меняется. Сложим результаты: $V_1 + V_2 = 2V_в$. Обозначим W объём воды в обоих сосудах и трубке до таяния, без льда.

Объём под общим уровнем h складывается из воды и погружённых частей льдинок:

$$\text{до таяния: } W + V_1 + V_2 = W + 2V_\text{в}, \qquad \text{после: } W + 2V_\text{в},$$

потому что каждая растаявшая льдинка стала водой объёма $V_\text{в}$. Объёмы равны, значит общий уровень h в сосудах не изменился.

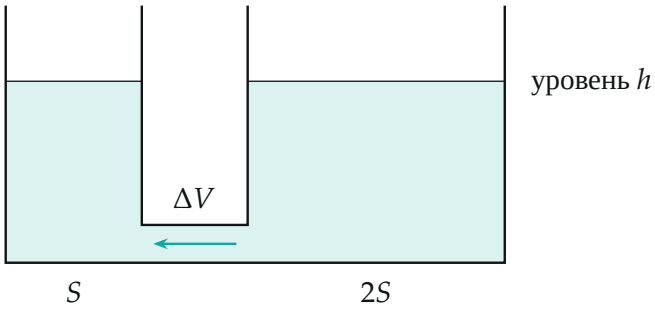
4. Перетекание. Рассмотрим малый сосуд. Пусть W_1 — объём воды в нём под уровнем h до таяния; вместе с погружённой льдинкой там было $W_1 + V_1$. После таяния уровень прежний, и под ним — вода W_1, добавленная льдинкой вода $V_\text{в}$ и объём q, пришедший по трубке (при $q < 0$ ушедший):

$$W_1 + V_\text{в} + q = W_1 + V_1 \quad \Rightarrow \quad q = V_1 - V_\text{в} = \Delta V.$$

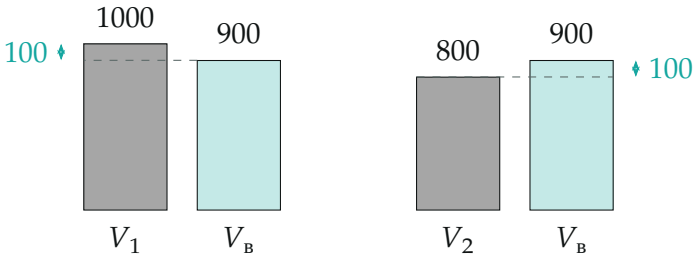
Подставим числа:

$$\Delta V = \frac{T}{\rho_0 g} = \frac{1\ \text{Н}}{1000\ \text{кг/м}^3 \cdot 10\ \text{м/с}^2} = 10^{-4}\ \text{м}^3 = 100\ \text{см}^3.$$

Знак $q > 0$: вода приходит в малый сосуд, то есть течёт из большого в малый. Для большого сосуда получаем $V_2 - V_\text{в} = -\Delta V$: из него ровно столько и уходит.

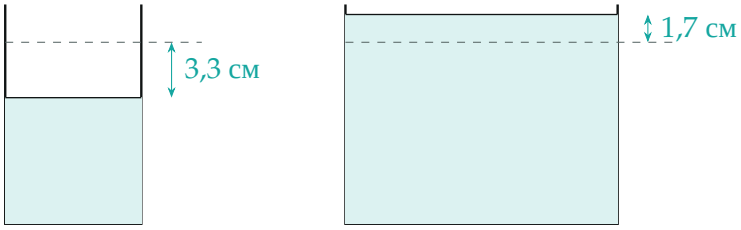


После таяния: льдинок нет, уровень тот же, что был; по трубке из большого сосуда в малый перетекло $\Delta V = 100\ см^3$.



Объёмы в см^3 для примера $m = 0{,}9$ кг (льдинка слева целиком под водой, как на рисунке): в малом сосуде погружённая часть на 100 больше воды из льдинки, в большом — на 100 меньше.

Проверка. Размерность: $\dfrac{\text{Н}}{(\text{кг}/\text{м}^3)(\text{м}/\text{с}^2)} = \text{м}^3$. При $T \to 0$ нити не натянуты, льдинки плавают свободно: $V_1 = V_2 = V_в$ и перетекания нет — как и должно быть. Второй способ — мысленно разделим сосуды. В малом сосуде при таянии объём под уровнем уменьшился бы на $\Delta V = 100$ см^3 — уровень упал бы на $\dfrac{\Delta V}{S} = \dfrac{100}{30} \approx 3{,}3$ см; в большом увеличился бы на ΔV — уровень поднялся бы на $\dfrac{\Delta V}{2S} = \dfrac{100}{60} \approx 1{,}7$ см. Сообщающиеся сосуды выравнивают уровни, и чтобы вернуть оба к прежнему h, нужно перелить 100 см^3 из большого в малый — тот же ответ.



S — уровень падает $2S$ — уровень растёт

Мысленный опыт: без соединения уровень слева упал бы на 3,3 см, справа вырос бы на 1,7 см; перетекание 100 см^3 всё выравнивает. Пунктир — прежний уровень.

Обратите внимание: площади сечений и плотность льда в ответ не входят. Плотность льда нужна лишь для проверки, что описанное возможно: объём погружённой части $V_1 = (mg + T)/(\rho_0 g)$ не может превышать объём самой льдинки m/ρ, откуда $m \geq 9T/g = 0{,}9$ кг; при $m = 0{,}9$ кг левая льдинка как раз целиком под водой — этот случай и нарисован.

Смысл: льдинка на нити перестаёт «заменять себя водой»: у неё вытесняемый объём больше или меньше объёма воды из неё на $\Delta V = T/(\rho_0 g)$ — на объём воды, вес которого равен натяжению нити. Именно этот объём и переходит из сосуда в сосуд.

Ответ. Уровень воды в сосудах не изменится; из большого сосуда в малый перетечёт $V = \dfrac{T}{\rho_0 g} = 100$ см^3 воды.