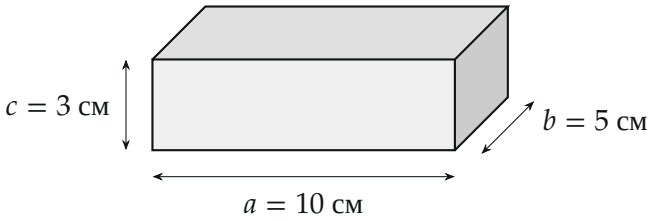
Параллелепипед в сосуде

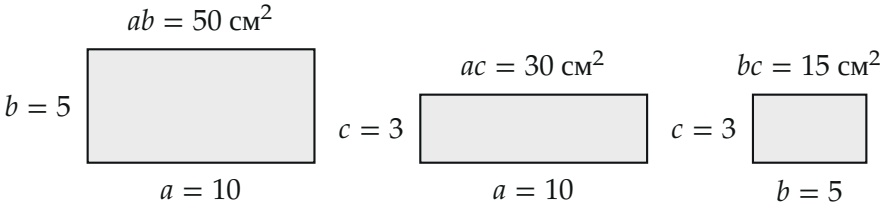
Задача 4. [Росатом 2022/23, отборочный этап, 10 класс, задача 4] Тело в виде прямоугольного параллелепипеда с размерами сторон $a \times b \times c = 10$ см $\times 5$ см $\times 3$ см положили в цилиндрический сосуд с водой. Если тело положить на сторону с самой большой площадью, высота уровня воды в сосуде составляет $h_1 = 4$ см. Если тело положить на сторону со средней площадью, высота уровня воды в сосуде составляет $h_2 = 3$ см. Найти объём воды в сосуде. Какой будет высота уровня воды в сосуде, если тело положить на дно сосуда на сторону с самой маленькой площадью?



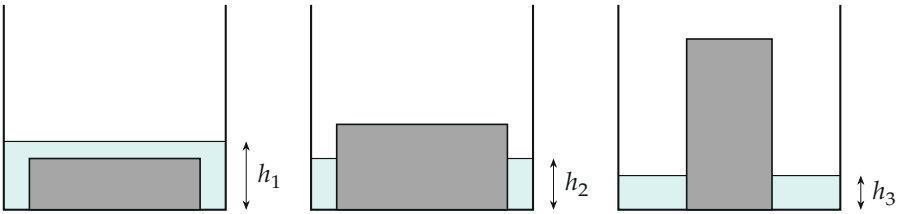
Поясняющий рисунок: параллелепипед и его размеры.

▲ **Решение. Что происходит.** Тело кладут на дно сосуда в трёх положениях. Вода и сосуд остаются теми же, меняется только то, какая часть тела оказывается под водой. Значит, во всех трёх случаях верно одно и то же: объём под уровнем h равен объёму воды плюс объёму погружённой части тела, $Sh = V + V_{\text{погр}}$. Неизвестны объём воды V и площадь дна S — их найдём из двух положений, потом вычислим уровень в третьем. Тело лежит на дне: если бы оно плавало, вытесняемый объём не зависел бы от положения, а уровни h_1 и h_2 различаются.

Обозначения. $a = 10$ см, $b = 5$ см, $c = 3$ см — рёбра; площади граней $ab = 50$ см^2 (наибольшая), $ac = 30$ см^2 (средняя), $bc = 15$ см^2 (наименьшая). V — объём воды, S — площадь дна сосуда (сосуд — прямой цилиндр, S постоянна). h_1, h_2, h_3 — уровни воды в положениях на грань ab, ac, bc; высота тела над дном в этих положениях — c, b, a соответственно.



Три грани в масштабе: тело ставят на каждую из них; высота тела над дном — третий размер (c, b, a).



Три положения тела на дне (разрез сосуда, в масштабе по найденным значениям $h_1 = 4$, $h_2 = 3$, $h_3 = 2$ см): тело целиком под водой только в первом положении.

1. Положение на грань ab**.** Высота тела $c = 3$ см меньше $h_1 = 4$ см, поэтому тело целиком под водой, и погружённый объём равен объёму тела abc. Баланс объёмов под уровнем:

$$S h_1 = V + abc.$$

2. Положение на грань ac**.** Высота тела $b = 5$ см больше $h_2 = 3$ см — тело погружено частично. Погружённая часть — слой высоты h_2 над гранью площади ac, её объём $ac\,h_2$:

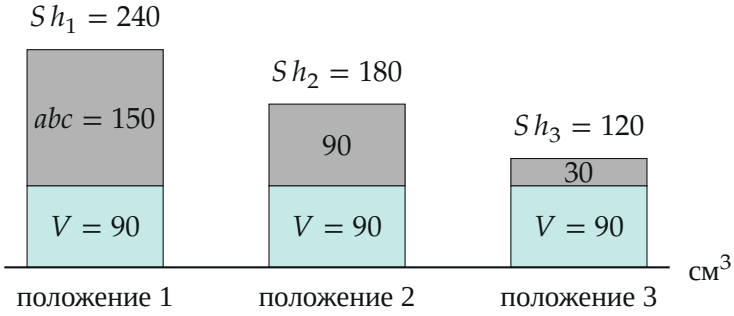
$$S h_2 = V + ac\,h_2.$$

3. Объём воды и площадь дна. Вычтем второе уравнение из первого:

$S(h_1 - h_2) = abc - ac\,h_2 = ac\,(b - h_2)$. Отсюда

$$S = \frac{ac\,(b - h_2)}{h_1 - h_2} = \frac{30 \cdot 2}{1}\ \text{см}^2 = 60\ \text{см}^2,$$
$$V = S\,h_1 - abc = (60 \cdot 4 - 150)\ \text{см}^3 = 90\ \text{см}^3.$$

В буквах $V = \dfrac{ac\,h_2\,(b - h_1)}{h_1 - h_2}$ — то же, $30 \cdot 3 \cdot 1/1 = 90$ см^3.

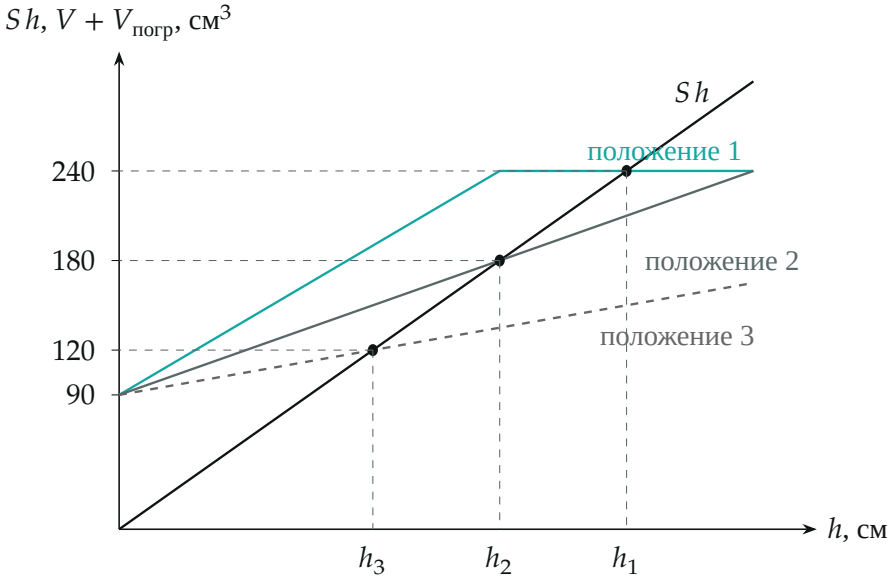


Баланс объёмов (в см^3): вода $V = 90$ одна и та же, погружённая часть тела — 150, 90 и 30; сумма равна $S\,h$ в каждом положении.

4. Положение на грань bc**.** Высота тела теперь $a = 10$ см, и уровень ниже её (проверим): тело погружено слоем высоты h_3 над гранью площади bc:

$$S\,h_3 = V + bc\,h_3 \quad \Rightarrow \quad h_3 = \frac{V}{S - bc} = \frac{90}{60 - 15}\ \text{см} = 2\ \text{см}.$$

Проверка предположения: $h_3 = 2$ см $< a = 10$ см — верно, тело погружено частично.



Графически: уровень — пересечение прямой $S\,h$ (площадь дна 60 см^2) с «объёмом воды плюс погружённая часть» для каждого положения. Прямые построены по формулам $V + ab\min(h,c)$, $V + ac\min(h,b)$, $V + bc\min(h,a)$ с $V = 90$; пересечения — $h_1 = 4$, $h_2 = 3$, $h_3 = 2$ см.

Проверка. Размерность: S — см^2, V — см^3, h — см. Второй способ — по подъёму уровня над уровнем воды без тела $V/S = 1{,}5$ см: тело вытесняет свой погружённый объём, и уровень поднимается на $V_{\text{погр}}/S$. Положение 1: $150/60 = 2{,}5$ см, $1{,}5 + 2{,}5 = 4$ см — верно. Положение 2: $90/60 = 1{,}5$ см, $1{,}5 + 1{,}5 = 3$ см — верно. Положение 3: $30/60 = 0{,}5$ см, $1{,}5 + 0{,}5 = 2$ см — верно. Все три данных уровня согласованы с одним $V = 90$ см^3 и одним $S = 60$ см^2.

Смысл: чем уже грань, на которую поставлено тело, тем выше оно выступает из воды, а чем меньше погружённый объём — тем ниже уровень; на самую узкую грань тело даёт самое низкое положение уровня.

Ответ. Объём воды $V = \dfrac{ac\,h_2\,(b - h_1)}{h_1 - h_2} = 90$ см^3; высота уровня при положении на наименьшую грань $h_3 = \dfrac{a\,h_2\,(b - h_1)}{a\,(b - h_2) - b\,(h_1 - h_2)} = 2$ см.