Двенадцать вольтметров

Задача 6. [Росатом 2022/23, отборочный этап, 10 класс, задача 6] Электрическая цепь, схема которой показана на рисунке, состоит из 12 одинаковых вольтметров. К цепи приложили некоторое напряжение (см. рисунок). Известно, что сумма показаний всех двенадцати вольтметров равна $U_0 = 24$ В. Найти показания всех вольтметров.

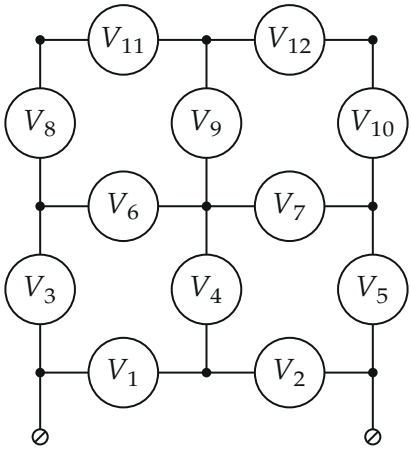


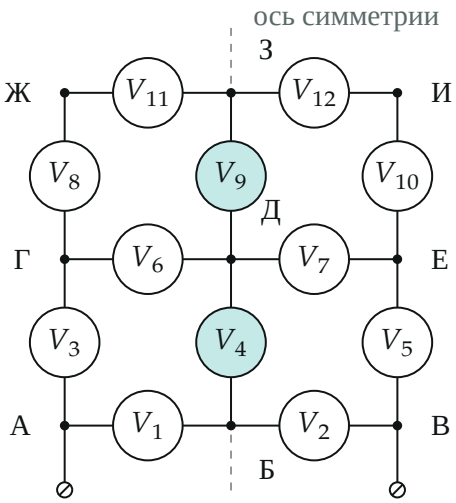
Рисунок условия: напряжение приложено между нижними выводами.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Вольтметр с конечным сопротивлением — обычный резистор, а его показание — напряжение на нём. У всех двенадцати вольтметров одно и то же сопротивление r. Цепь — «сетка» 3×3, зеркально симметричная относительно вертикальной оси, на которой лежат точки Б, Д и З. Главная идея: потенциал точек на оси равен половине приложенного напряжения, поэтому на V_4 и V_9 напряжения нет — их можно убрать, и цепь сводится к последовательным и параллельным соединениям. Сначала найдём показания в долях приложенного напряжения U, затем выразим U через U_0.

Обозначения. r — сопротивление одного вольтметра; U — напряжение между выводами цепи (точки А и В); φ — потенциал; U_k — показание вольтметра V_k. Потенциал точки А примем равным нулю: $\varphi_\text{А} = 0$, $\varphi_\text{В} = U$.

1. Потенциалы точек на оси симметрии. Зеркальное отражение меняет местами А и В, Г и Е, Ж и И, а точки Б, Д, З оставляет на месте. Подавая напряжение на выводы, мы задаём потенциалы 0 и U; поменяв выводы местами, получим картину токов, зеркальную прежней. Цепь линейна, решение для неё единственно, поэтому потенциалы зеркальных точек в сумме дают U: $\varphi + \varphi' = U$. Для точки на оси зеркальная точка — она сама, отсюда $2\varphi = U$:

$$\varphi_Б = \varphi_Д = \varphi_З = \frac{U}{2}.$$



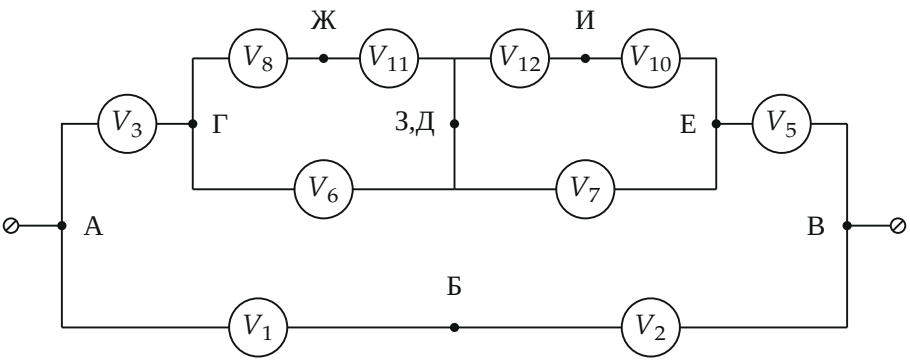
Точки Б, Д, З лежат на оси симметрии (штрих); вольтметры V_4 и V_9 (закрашены) соединяют точки одного потенциала

2. Вольтметры V_4 и V_9. Концы V_4 — точки Б и Д, концы V_9 — точки З и Д. Потенциалы всех трёх точек равны $U/2$, напряжение на этих вольтметрах равно нулю и ток через них не идёт:

$$U_4 = U_9 = 0.$$

Элемент без тока можно убрать, токи в остальных участках не изменятся. Точки З и Д можно соединить проводом: их потенциалы равны, ток

по проводу не пойдёт, так что цепь превращается в две одинаковые половины, соединённые в точке З,Д.



Эквивалентная цепь без V_4 и V_9. Верхний путь А–Г–З,Д–Е–В включён параллельно нижнему А–Б–В

3. Нижний путь. Вольтметры V_1 и V_2 включены последовательно между выводами и одинаковы, поэтому напряжение U делится между ними поровну:

$$U_1 = U_2 = \frac{U}{2}.$$

4. Левая половина верхнего пути. Между точкой А и точкой Д приложено напряжение $\varphi_Д - \varphi_А = U/2$. Вольтметр V_3 включён последовательно с группой Г–Д, где V_6 параллелен цепочке из V_8 и V_{11} (два вольтметра подряд, $2r$). Сопротивление группы и всего участка А–Д:

$$r_{Г–Д} = \frac{r \cdot 2r}{r + 2r} = \frac{2r}{3}, \qquad r_{А–Д} = r + \frac{2r}{3} = \frac{5r}{3}.$$

Ток участка и напряжение на V_3:

$$I_3 = \frac{U/2}{5r/3} = \frac{3U}{10\,r}, \qquad U_3 = I_3\,r = \frac{3}{10}\,U.$$

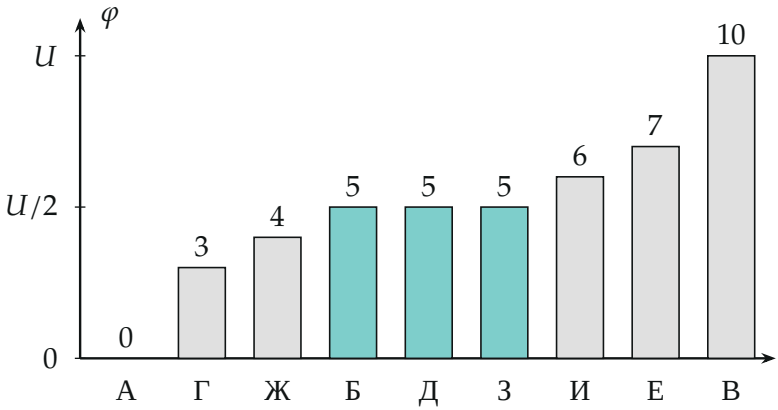
На группе остаётся $U/2 - 3U/10 = U/5$. К V_6 приложено всё это на-

пряжение, к цепочке V_8, V_{11} — тоже, и она делится поровну:

$$U_6 = \frac{U}{5} = \frac{2}{10}U, \qquad U_8 = U_{11} = \frac{U}{10}.$$

5. Правая половина. Правая половина — зеркальное отражение левой, поэтому

$$U_5 = U_3 = \frac{3}{10}U, \qquad U_7 = U_6 = \frac{2}{10}U, \qquad U_{10} = U_{12} = U_8 = \frac{1}{10}U.$$



Потенциалы узлов в долях $U/10$ ($\varphi_A = 0$, $\varphi_B = U$). Напряжение на вольтметре — разность высот столбиков его концов; у Б, Д, З высота одна, $U/2$

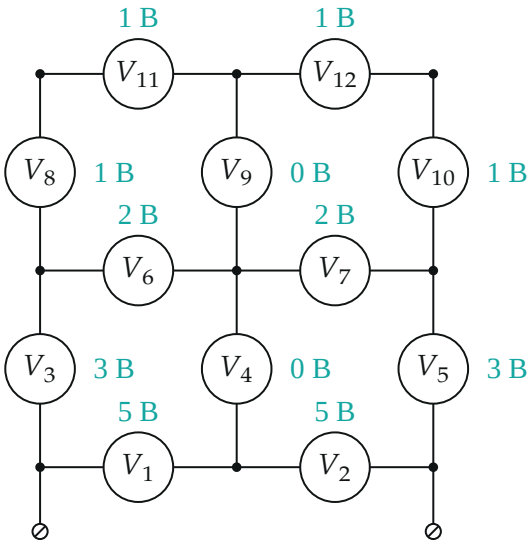
6. Сумма показаний. В сумму входят все двенадцать вольтметров, нулевые тоже:

$$U_1 + \cdots + U_{12} = \frac{U}{10}(5+5+3+0+3+2+2+1+0+1+1+1) = \frac{24}{10}U = U_0.$$

Отсюда $U = \frac{5}{12}U_0 = 10$ В, и показания — те же доли, умноженные на

U:

$$U_1 = U_2 = \frac{5}{24}U_0 = 5\text{ В}, \qquad U_3 = U_5 = \frac{3}{24}U_0 = 3\text{ В},$$
$$U_6 = U_7 = \frac{2}{24}U_0 = 2\text{ В}, \qquad U_4 = U_9 = 0,$$
$$U_8 = U_{10} = U_{11} = U_{12} = \frac{1}{24}U_0 = 1\text{ В}.$$



Показания вольтметров в вольтах (у каждого — рядом с кружком)

Обратите внимание: V_4 и V_9 показывают нуль не потому, что они «не работают», а потому, что разность потенциалов их концов равна нулю. Но в сумму U_0 они входят — с нулевым вкладом.

Проверка. Второй способ — обход путей от А до В: сумма напряжений вдоль любого пути равна $U = 10$ В. Путь А–Б–В: $5 + 5$. Путь А–Г–Д–Е–В: $3 + 2 + 2 + 3$. Путь А–Г–Ж–З–И–Е–В: $3 + 1 + 1 + 1 + 1 + 3$. Токи в узле Г (в единицах $U/(10r)$): входит 3 через V_3, выходит 2 через V_6 и 1 через V_8 — заряд не накапливается. Смысл: ток от вывода делится между нижним и верхним путями, а на оси симметрии верхнего пути потенциал уже равен середине между выводами.

Ответ. $U_1 = U_2 = 5$ В; $U_3 = U_5 = 3$ В; $U_6 = U_7 = 2$ В; $U_8 = U_{10} = U_{11} = U_{12} = 1$ В; $U_4 = U_9 = 0$.