Стержень с грузами сразу после старта

Задача 4. [Росатом 2022/23, отборочный этап, 10 класс, задача 4] К концам невесомого стержня длиной l, который может без трения вращаться вокруг горизонтальной оси, делящей стержень на два участка длиной $l/4$ и $3l/4$, прикреплены точечные тела массой $2m$ и m (см. рисунок). Вначале стержень удерживают горизонтально, а в некоторый момент времени отпускают. Найти ускорения тел сразу после этого.

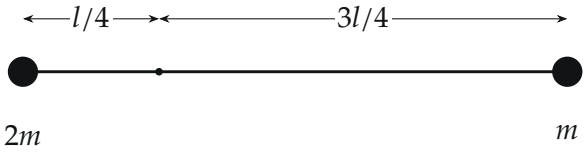
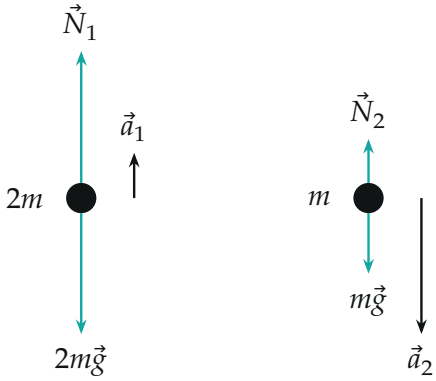


Рисунок условия. Ось вращения — точка на стержне, делящая его на $l/4$ и $3l/4$.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Сразу после освобождения скорости тел равны нулю, поэтому центростремительных ускорений нет: ускорения вертикальны. Стержень невесом — значит, сумма сил и сумма моментов сил, действующих на него, равны нулю, иначе у невесомого стержня было бы бесконечное ускорение. Это связывает силы, с которыми тела давят на стержень. Стержень жёсткий: его концы описывают дуги вокруг оси, и их ускорения пропорциональны расстояниям до оси. Остаётся второй закон Ньютона для каждого тела.

Обозначения. N_1 и N_2 — силы, с которыми стержень действует на тела $2m$ и m (тела действуют на стержень силами N_1 и N_2, направленными вниз, по третьему закону Ньютона); R — реакция оси; a_1 и a_2 — проекции ускорений тел на ось y, направленную вниз (тогда силы тяжести положительны). Тела — материальные точки.

1. Силы на тела. На каждое тело действуют сила тяжести вниз и сила со стороны стержня вверх (стержень тянет тело вверх, поскольку тело давит на стержень вниз).

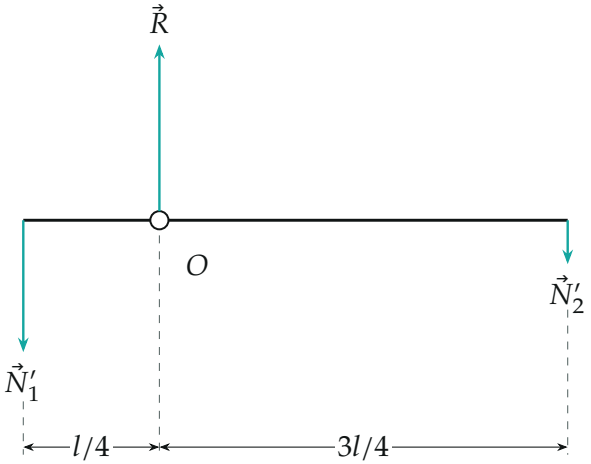


Силы на тела (стрелки сил в одном масштабе, значения N_1, N_2 — найденные ниже); ускорения — чёрным, в другом масштабе

2. Условие для стержня. На невесомый стержень действуют N_1 и N_2 (вниз) со стороны тел и R (вверх) со стороны оси. Запишем правило моментов относительно оси: сила R проходит через ось, её момент равен нулю — поэтому ось выбрана для моментов:

$$N_1 \cdot \frac{l}{4} = N_2 \cdot \frac{3l}{4} \quad \Rightarrow \quad N_1 = 3N_2. \tag{1}$$

Равенство нулю суммы моментов справедливо для невесомого стержня при любом угловом ускорении, потому что его момент инерции равен нулю.

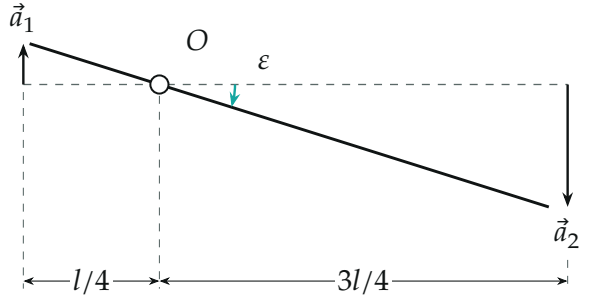


Силы на стержень (тот же масштаб): $R = N_1 + N_2$ — сумма сил на стержень равна нулю

Обратите внимание: $N_1 \neq N_2$. Равенство сил на концах невесомого стержня было бы верно, если бы на него действовали только две силы; здесь есть ещё реакция оси.

3. Связь ускорений. Стержень поворачивается вокруг оси как целое, его концы смещаются на малые дуги, пропорциональные расстояниям до оси; в начале дуги вертикальны. Одно тело движется вверх, другое — вниз, причём смещение у конца $3l/4$ втрое больше, чем у конца $l/4$:

$$a_2 = -3\,a_1. \tag{2}$$



Малый поворот стержня: смещения концов, а значит и ускорения, относятся как плечи $l/4 : 3l/4 = 1 : 3$ и направлены в противоположные стороны

4. Второй закон Ньютона для тел в проекциях на ось y (вниз):

$$2m\,a_1 = 2mg - N_1, \qquad m\,a_2 = mg - N_2. \tag{3}$$

Подставим N_1 и N_2 из (3) в условие (1), а a_2 заменим по (2):

$$2mg - 2ma_1 = 3\,(mg + 3ma_1) \;\Rightarrow\; -mg = 11\,ma_1,$$

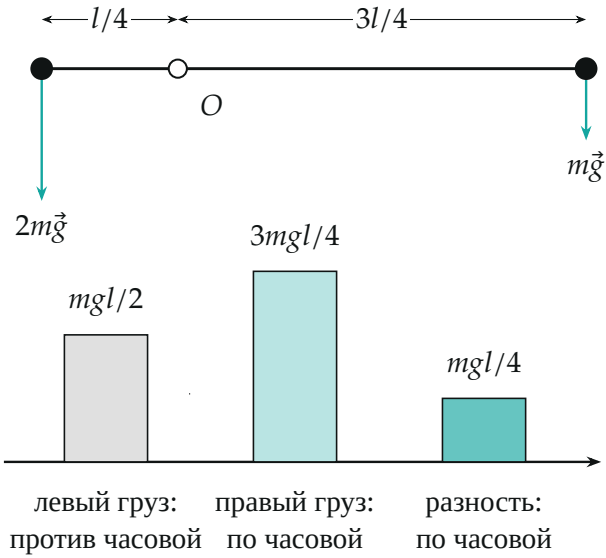
$$a_1 = -\frac{g}{11}, \qquad a_2 = -3a_1 = \frac{3g}{11}.$$

Минус у a_1 означает, что тело $2m$ ускоряется вверх; тело m — вниз. Заодно $N_2 = mg - ma_2 = \frac{8}{11}\,mg$, $N_1 = 3N_2 = \frac{24}{11}\,mg$.

Проверка. Второй способ — моменты для системы стержень с телами относительно оси. Моменты сил тяжести: правое тело вращает по часовой стрелке с моментом $mg \cdot \frac{3l}{4}$, левое — против с моментом $2mg \cdot \frac{l}{4}$; суммарный момент $M = \frac{mgl}{4}$ по часовой. Момент инерции $I = 2m\left(\frac{l}{4}\right)^2 + m\left(\frac{3l}{4}\right)^2 = \frac{11}{16}\,ml^2$, угловое ускорение $\varepsilon = \dfrac{M}{I} = \dfrac{4g}{11\,l}$, откуда

$$a_1 = \varepsilon\,\frac{l}{4} = \frac{g}{11}, \qquad a_2 = \varepsilon\,\frac{3l}{4} = \frac{3g}{11}$$

— тот же результат.



Моменты сил тяжести относительно оси O: правое тело перевешивает, результирующий момент $mgl/4$ вращает стержень по часовой стрелке

Предел: если бы слева была масса $3m$, моменты $3mg \cdot \frac{l}{4}$ и $mg \cdot \frac{3l}{4}$ сравнялись бы, $M = 0$ и ускорения нулевые — стержень в равновесии. Смысл: тело $2m$ тяжелее, но его плечо втрое короче, поэтому перевешивает лёгкое тело на длинном плече.

Ответ. Тело массой $2m$: ускорение $g/11$, направлено вверх. Тело массой m: ускорение $3g/11$, направлено вниз.