Цепь с омметром

Задача 5. [Росатом 2022/23, отборочный этап, 10 класс, задача 5] Электрическая цепь, схема которой приведена на рисунке, содержит шесть резисторов: $R_1 = 3$ Ом, $R_2 = 6$ Ом, $R_3 = 3$ Ом, $R_4 = 1$ Ом, $R_5 = 2$ Ом, $R_6 = 1$ Ом, идеальные амперметр и вольтметр, а также омметр. Найти показания приборов. Ответ обосновать.

Указание: омметр — прибор для измерения сопротивлений — представляет собой последовательно соединённые источник напряжения, амперметр и резистор. Омметр измеряет силу электрического тока в цепи и пересчитывает её и напряжение источника в сопротивление внешней цепи.

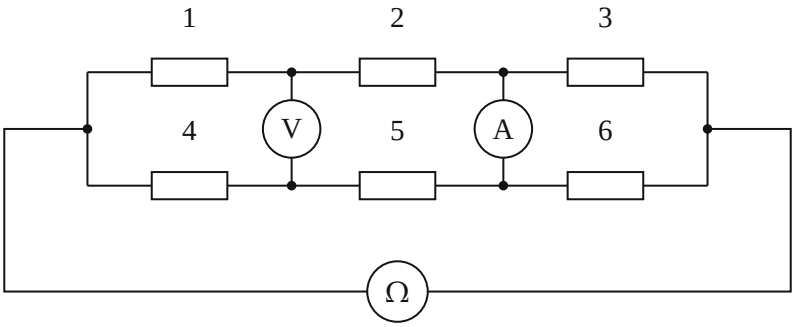
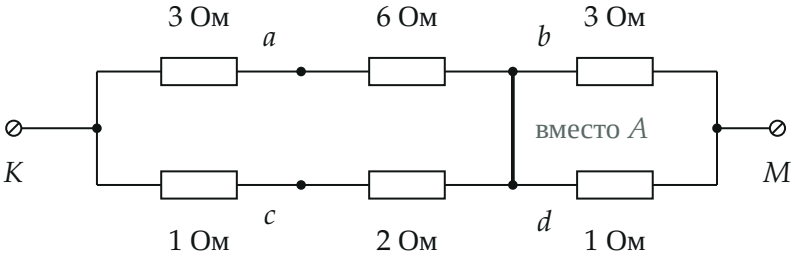


Рисунок условия: верхняя цепочка R_1, R_2, R_3, нижняя R_4, R_5, R_6; между ними вольтметр V и амперметр A; омметр Ω подключён к крайним точкам цепочек.

▲ **Решение. Что происходит.** Идеальный вольтметр имеет бесконечное сопротивление: тока через него нет, его можно убрать из цепи, а он покажет разность потенциалов своих выводов. У идеального амперметра сопротивление нуль: он равносилен проводу, а показывает ток в этом проводе. Омметр — источник напряжения U с амперметром: он измеряет ток I и выдаёт $R = U/I$, то есть сопротивление цепи между своими выводами. Главная идея: цепочки $3 + 6 + 3$ и $1 + 2 + 1$ *подобны* — сопротивления относятся как $1 : 2 : 1$ в обеих. Тогда потенциалы соответствующих точек цепочек одинаковы: на вольтметре нуль, по перемычке амперметра ток не идёт, и цепь — просто две параллельные цепочки.

Обозначения. K и M — выводы омметра, $\varphi_K = U$, $\varphi_M = 0$ (U — напряжение его источника); a, b — точки верхней цепочки между R_1 и R_2, между R_2 и R_3; c, d — такие же точки нижней.

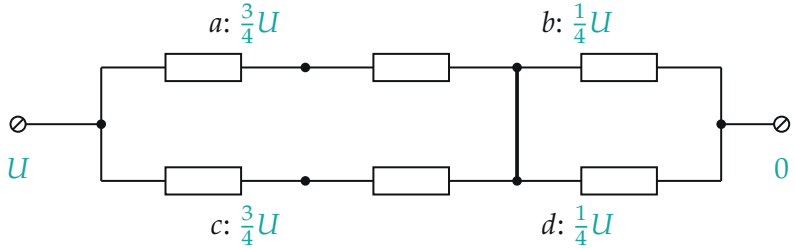
1. Идеальные приборы убираем. Вольтметр удаляем из цепи (между a и c тока нет), амперметр заменяем проводом между b и d. Предположим, что тока по этому проводу нет, найдём потенциалы и проверим предположение.



Цепь без приборов: вольтметр убран, амперметр заменён проводом b–d. K и M — выводы омметра

2. Потенциалы точек. Если по проводу b–d тока нет, цепочки не влияют друг на друга: к каждой приложено U. Верхняя цепочка $3+6+3 = 12$ Ом, ток $U/12$; нижняя $1+2+1 = 4$ Ом, ток $U/4$. Потенциал уменьшается на IR на каждом резисторе:

$$\varphi_a = U - \frac{U}{12}\cdot 3 = \frac{3}{4}U, \qquad \varphi_b = U - \frac{U}{12}\cdot 9 = \frac{1}{4}U;$$
$$\varphi_c = U - \frac{U}{4}\cdot 1 = \frac{3}{4}U, \qquad \varphi_d = U - \frac{U}{4}\cdot 3 = \frac{1}{4}U.$$

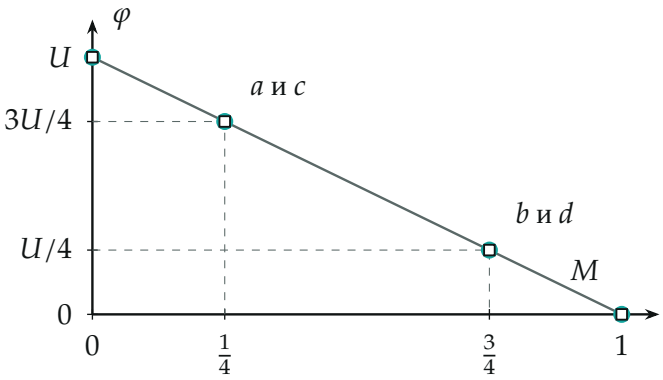


Потенциалы точек (бирюзой): $\varphi_a = \varphi_c$, $\varphi_b = \varphi_d$

Потенциалы a и c равны, b и d равны. Значит, предположение верно: по проводу между равными потенциалами ток не идёт, ток амперметра $I_A = 0$; напряжение между a и c равно нулю, вольтметр показывает

$$U_V = \varphi_a - \varphi_c = 0.$$

Решение цепи единственно, поэтому именно такое распределение токов и потенциалов реализуется.



Потенциал вдоль цепочек как функция доли её сопротивления: у верхней цепочки точки — кружки, у нижней — квадраты. Они лежат на одной прямой, поэтому равны потенциалы точек a, c и b, d. Слева — вывод K ($\varphi = U$), справа — вывод M ($\varphi = 0$)

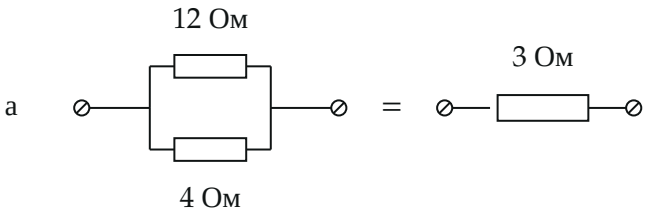
Обратите внимание: нули на приборах — не «неисправность», а следствие подобия цепочек: каждая цепочка делит напряжение на части $\frac{1}{4} : \frac{1}{2} : \frac{1}{4}$. Стоило бы изменить один резистор — вольтметр и амперметр показали бы не нуль.

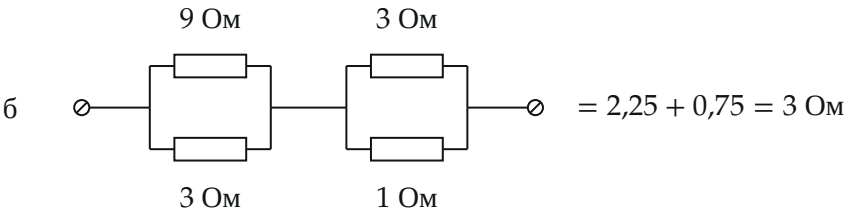
3. Показание омметра. Ток в цепи $I = \dfrac{U}{12} + \dfrac{U}{4} = \dfrac{U}{3}$, откуда

$$R_\Omega = \frac{U}{I} = 3\ \text{Ом} \qquad \left(\text{или } \frac{1}{R_\Omega} = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3}\right).$$

Проверка. Второй способ — по схеме с проводом b–d: точки b и d объединены, получаются две пары параллельных ветвей, включённых последовательно:

$$R_\Omega = \frac{(R_1+R_2)(R_4+R_5)}{R_1+R_2+R_4+R_5} + \frac{R_3R_6}{R_3+R_6} = \frac{9\cdot 3}{12} + \frac{3\cdot 1}{3+1} = 3\ \text{Ом}.$$





Два расчёта сопротивления: а — параллельные цепочки 12 *и* 4 *Ом; б — мост с проводом b–d. Результат один:* 3 *Ом*

Сопротивления сошлись, и это подтверждает равенство потенциалов b и d: иначе провод изменил бы сопротивление цепи. Условие баланса $(R_1+R_2)R_6 = (R_4+R_5)R_3$ выполнено: $9\cdot 1 = 3\cdot 3$.

Ответ. Вольтметр показывает $U_V = 0$, амперметр — $I_A = 0$, омметр — $R_\Omega = 3$ Ом.