Поплавки с грузом

Задача 2. [Росатом 2022/23, отборочный этап, 11 класс, задача 2] «Поплавки с грузом».

Два одинаковых сферических поплавка радиуса R и массой m плавают в воде, погрузившись в неё наполовину. К поплавкам привязывают верёвку длиной l, к середине которой прикрепляют тяжёлый груз. Поплавки с грузом тонут (см. рисунок). Найти силу натяжения верёвки и силу, с которой шары действуют друг на друга.

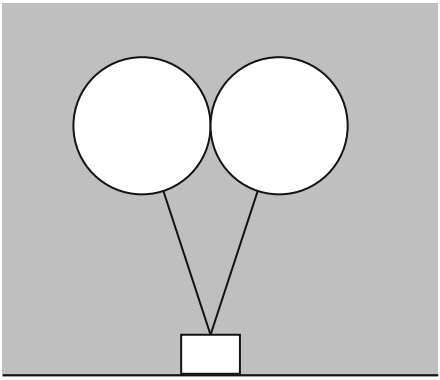


Рисунок из условия: серым показана вода, шары касаются друг друга, верёвки идут к грузу

▲ **Решение.** **Что происходит.** Свободный шар плавает, погрузившись наполовину: значит, сила Архимеда на половину его объёма уравновешивает mg. Когда шар утянут под воду целиком, объём вытесненной воды вдвое больше и сила Архимеда равна $2mg$. Половину из них уравновешивает вес шара, а вторая половина — вертикальная составляющая натяжения верёвки, которая тянет шар вниз. Горизонтально верёвка тянет шар к оси симметрии, а второй шар не даёт им сомкнуться, и это сила их взаимодействия. Идея: равновесие одного шара в проекциях на вертикаль и горизонталь, а угол верёвки — из геометрии.

Обозначения. $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ — объём шара, ρ — плотность воды, T — натяжение верёвки (по симметрии одно и то же у обеих половин), N — сила, с которой шары действуют друг на друга, F_A — сила Архимеда

на целиком погружённый шар, α — угол между верёвкой и вертикалью. Ось x направим вправо, ось y вверх; рассматриваем левый шар.

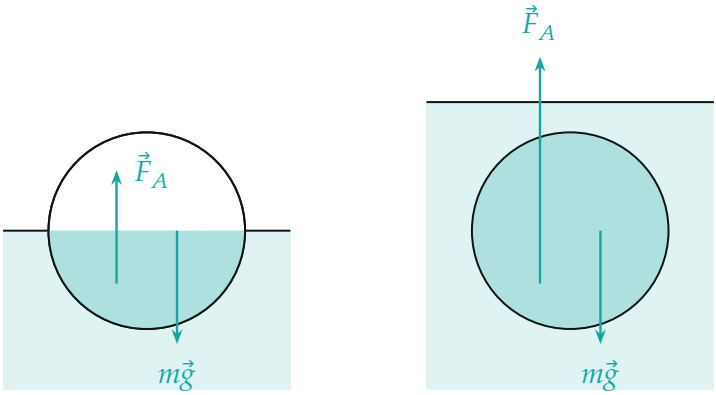
1. Сила Архимеда на погружённый шар. Свободный шар плавает в равновесии: сила тяжести равна силе Архимеда вытесненной воды объёма $V/2$:

$$mg = \rho g \frac{V}{2}.$$

Под водой шар вытесняет объём V, поэтому

$$F_A = \rho g V = 2mg.$$

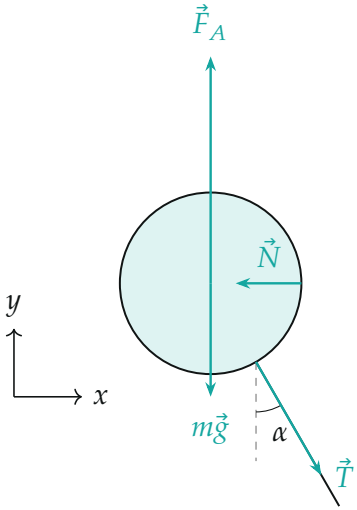
Зачем так: через mg выражаем F_A и не вводим ни ρ, ни V.



свободный: $F_A = mg$ под водой: $F_A = 2mg$

Слева — свободный шар, наполовину в воде: сила Архимеда равна mg. Справа — шар полностью под водой: вытесненный объём вдвое больше, сила Архимеда $2mg$ (длины стрелок F_A относятся как $1:2$)

2. Силы на левый шар. На него действуют: сила тяжести $m\vec{g}$ вниз, сила Архимеда $\vec{F}_A$ вверх, натяжение $\vec{T}$ вдоль верёвки (вниз и к оси симметрии) и сила $\vec{N}$ со стороны правого шара — по линии центров, то есть горизонтально и влево, от второго шара. Верёвка в условии идёт к центру шара, поэтому линия действия $\vec{T}$ проходит через центр; остальные три силы тоже проходят через центр (шары гладкие). Моментов нет, шар не вращается, достаточно сил.

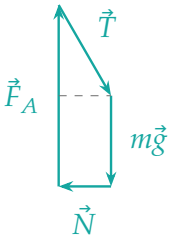


Силы на левый шар: нить идёт к грузу вдоль радиуса, $\vec{T}$ направлена точно по нити; $\vec{N}$ приложена в точке касания шаров. Длины стрелок — при $l = 2R$ ($\alpha = 30°$)

3. Равновесие шара. Шар покоится, поэтому сумма сил равна нулю. Запишем второй закон Ньютона в проекциях на оси:

$$y: \quad F_A - mg - T\cos\alpha = 0 \;\Rightarrow\; T\cos\alpha = 2mg - mg = mg,$$
$$x: \quad T\sin\alpha - N = 0 \;\Rightarrow\; N = T\sin\alpha = mg\ \mathrm{tg}\,\alpha.$$

Знаки: $\vec{T}$ тянет шар вправо (к оси симметрии), $\vec{N}$ — влево, поэтому в проекции на x они стоят с противоположными знаками.

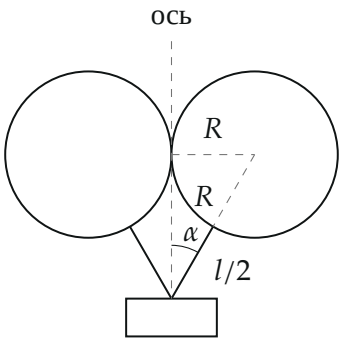


Многоугольник сил при $l = 2R$: четыре силы образуют замкнутую фигуру; $T\cos\alpha = F_A - mg = mg$, $T\sin\alpha = N$

4. Угол верёвки. Шары касаются, расстояние между центрами $2R$, поэтому каждый центр удалён от оси симметрии (вертикали через груз) на R. Верёвка идёт от груза к центру шара: от груза до поверхности шара — половина верёвки $l/2$, ещё R — до центра, всего $l/2 + R$. В прямоугольном треугольнике «груз — центр шара — основание перпендикуляра на ось» гипотенуза $l/2 + R$, катет против угла α равен R:

$$\sin\alpha = \frac{R}{l/2 + R} = \frac{2R}{l + 2R},$$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{(l/2 + R)^2 - R^2}}{l/2 + R} = \frac{\sqrt{l\,(l + 4R)}}{l + 2R}.$$



Геометрия при $l = 2R$: гипотенуза $l/2 + R = 2R$ от груза до центра правого шара, катет R — расстояние центра от оси, угол $\alpha = 30°$

5. Ответ. Из $T\cos\alpha = mg$ получаем натяжение, затем силу взаимодействия шаров:

$$T = \frac{mg}{\cos\alpha} = \frac{mg\,(l + 2R)}{\sqrt{l\,(l + 4R)}},$$

$$N = T\sin\alpha = \frac{mg\,(l + 2R)}{\sqrt{l\,(l + 4R)}} \cdot \frac{2R}{l + 2R} = \frac{2mgR}{\sqrt{l\,(l + 4R)}}.$$

Обратите внимание: сила Архимеда, действующая на шар, погружённый целиком, равна $2mg$, а не mg. Если взять mg, вертикальная составляющая натяжения окажется нулевой, и верёвка не нужна — а на самом деле именно она не даёт шарам всплыть.

Проверка. Размерность: T и N — силы, так как mg умножается на безразмерные отношения длин. Предел $l \to \infty$ (длинная верёвка, почти вертикальная): $T \to mg$, $N \to 0$; тогда $2mg = mg + T$ на каждый шар, как и должно быть. Предел $l \to 0$: верёвки становятся горизонтальными, $T, N \to \infty$. Второй способ — числа: при $l = 2R$ получаем $\alpha = 30°$, $T = mg/\cos 30° = 1{,}155\,mg$, $N = mg\,\mathrm{tg}\,30° = 0{,}577\,mg$; формулы дают $mg \cdot 4R/\sqrt{12}R = 1{,}155\,mg$ и $2mgR/(\sqrt{12}R) = 0{,}577\,mg$ — то же.

Физический смысл: груз тянет поплавки вниз и тем самым сближает их, а гидростатический подъём вдвое превосходит вес — поэтому натяжение чуть больше mg и тем больше, чем короче верёвка.

Ответ. $T = \dfrac{mg\,(l + 2R)}{\sqrt{l\,(l + 4R)}}$; $\quad N = \dfrac{2mgR}{\sqrt{l\,(l + 4R)}}$.