Цепь с амперметрами

Задача 3. [Росатом 2022/23, отборочный этап, 11 класс, задача 3] «Цепь с амперметрами».

В цепи, схема которой представлена на рисунке, $R = 10$ Ом, амперметры идеальны, провода сопротивления не имеют. Напряжение U на зажимах источника $U = 100$ В. Найти показания амперметров.

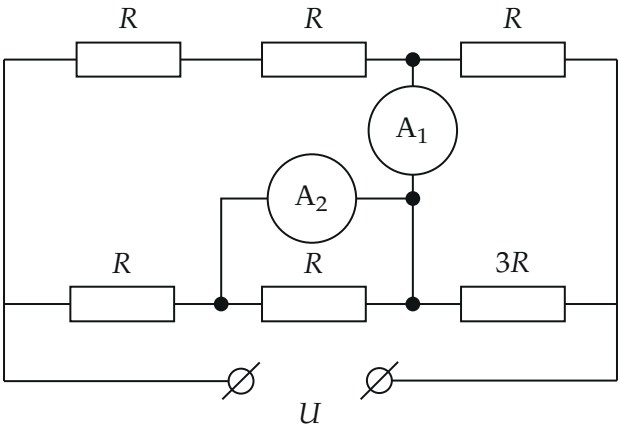
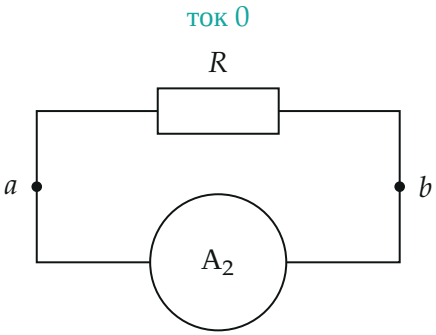


Схема из условия

▲ **Решение. Что происходит.** У идеального амперметра и у провода сопротивление нулевое, поэтому точки, соединённые ими, имеют один потенциал. Амперметр A_2 включён параллельно среднему резистору нижней ветви: напряжение на этом резисторе равно нулю, и тока в нём нет. Амперметр A_1 соединяет два узла, значит, они тоже в одной точке. Заменим амперметры проводами, и цепь окажется двумя последовательными группами параллельных резисторов; общий ток и напряжение на группах найдём по закону Ома. Токи в самих амперметрах получим из баланса токов в узлах (заряд в узле не копится).

Обозначения. Левый провод, соединённый с одним зажимом источника, назовём P (потенциал U), правый провод — Q (потенциал 0). Узлы: a — между левым и средним резисторами нижней ветви, b — между средним резистором и резистором $3R$, c — между вторым и третьим резисторами верхней ветви. Токи в амперметрах: I_1 (от b к c) и I_2 (от a к b). Для краткости $I_0 = \dfrac{U}{17R}$ — единица, в которой окажутся все токи.

1. Амперметр A_2 и средний резистор. Амперметр A_2 подключён между узлами a и b, то есть параллельно среднему резистору R. Сопротивление амперметра нулевое, поэтому $\varphi_a = \varphi_b$ и напряжение на резисторе $U_{ab} = 0$. Тогда ток в нём $U_{ab}/R = 0$: резистор можно убрать, токи в остальных участках не изменятся.



Идеальный амперметр, включённый параллельно резистору, замыкает его накоротко: напряжение на резисторе нулевое, ток через него не идёт

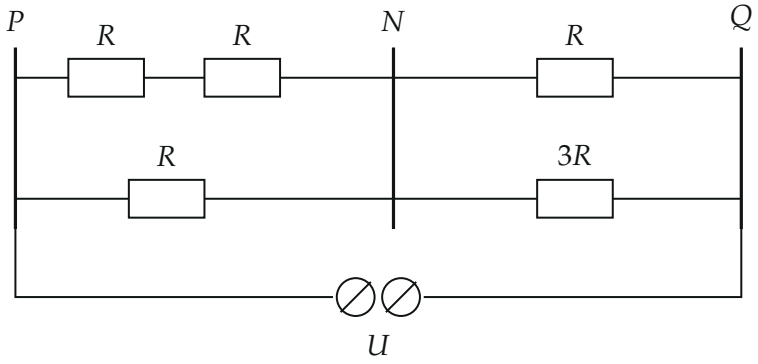
2. Амперметр A_1 и общий узел. Амперметр A_1 соединяет узлы c и b, поэтому $\varphi_c = \varphi_b$. Вместе с шагом 1 получаем: узлы a, b, c имеют один потенциал — сольём их в один узел N.

3. Эквивалентная схема. От P до N идут две ветви: два резистора R последовательно (сопротивление $2R$) и параллельно им левый резистор R нижней ветви; от N до Q — параллельно верхний правый резистор R и резистор $3R$:

$$R_{PN} = \frac{2R \cdot R}{2R + R} = \frac{2R}{3}, \qquad R_{NQ} = \frac{R \cdot 3R}{R + 3R} = \frac{3R}{4},$$

$$R_{\text{общ}} = R_{PN} + R_{NQ} = \frac{2R}{3} + \frac{3R}{4} = \frac{17R}{12}.$$

Группы соединены последовательно через узел N, поэтому сопротивления складываются.

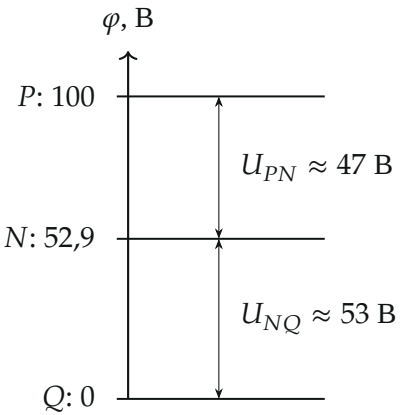


Эквивалентная схема: узлы a, b, c слиты в один узел N, средний резистор убран, амперметры заменены проводами

4. Ток в цепи и напряжения на группах. По закону Ома для всей цепи

$$I = \frac{U}{R_{\text{общ}}} = \frac{12U}{17R}, \qquad U_{PN} = I\,R_{PN} = \frac{8U}{17}, \qquad U_{NQ} = I\,R_{NQ} = \frac{9U}{17}.$$

Сумма напряжений на двух последовательных группах равна U: $8U/17 + 9U/17 = U$.



Потенциалы узлов при $U = 100$ В (масштаб по вертикали соблюдён): $\varphi_P = 100$ В, $\varphi_N = \frac{9}{17}U \approx 52{,}9$ В, $\varphi_Q = 0$

5. Токи в резисторах. Напряжение на каждом резисторе группы одно и то же:

$$I_{2R} = \frac{U_{PN}}{2R} = 4I_0, \quad I_{R,\text{н}} = \frac{U_{PN}}{R} = 8I_0,$$
$$I_{R,\text{в}} = \frac{U_{NQ}}{R} = 9I_0, \quad I_{3R} = \frac{U_{NQ}}{3R} = 3I_0.$$

Проверка узлов группы: $4I_0 + 8I_0 = 12I_0 = 9I_0 + 3I_0$ — токи сошлись в общем токе $I = 12I_0$.

6. Показания амперметров — по балансу токов в узлах. Заряд в узле не накапливается: сколько тока втекает, столько и вытекает. Узел c (между вторым и третьим резисторами верхней ветви): втекает $4I_0$ от двух левых резисторов и I_1 через A_1, вытекает $9I_0$ через правый резистор:

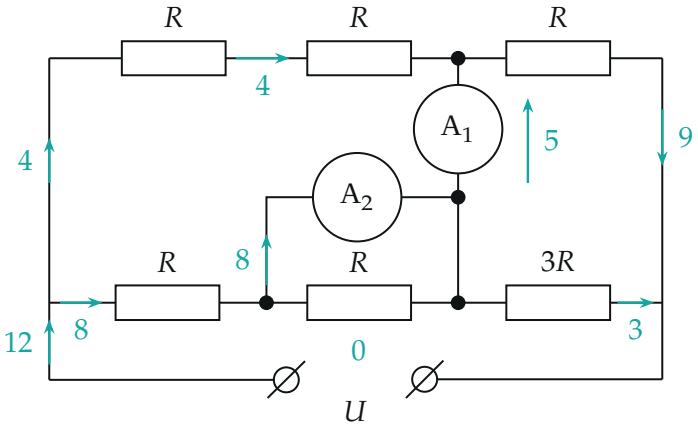
$$4I_0 + I_1 = 9I_0 \;\Rightarrow\; I_1 = 5I_0.$$

Узел a: втекает $8I_0$ от нижнего левого резистора, вытекает только через A_2 (в среднем резисторе тока нет):

$$I_2 = 8I_0.$$

Числа: $I_0 = \dfrac{100\ \text{В}}{17 \cdot 10\ \text{Ом}} = 0{,}588\ \text{А}$, поэтому

$$I_1 = 5I_0 = \frac{5U}{17R} \approx 2{,}9\ \text{А}, \qquad I_2 = 8I_0 = \frac{8U}{17R} \approx 4{,}7\ \text{А}.$$



Токи в схеме в единицах $I_0 = U/(17R)$: сумма в каждом узле сходится (узел b: $8 = 5 + 3$); в среднем резисторе нижней ветви тока нет

Обратите внимание: токи амперметров нельзя найти по формулам для последовательных и параллельных резисторов — амперметры ничего не добавляют к сопротивлению. Они находятся из баланса токов в узлах a и c.

Проверка и второй способ. Размерность: U/R — ампер. Узел b в вычислении не использовался, поэтому он проверяет ответ: втекает $I_2 = 8I_0$ через A_2, вытекает $I_1 + I_{3R} = 5I_0 + 3I_0 = 8I_0$ — верно. Второй способ — метод потенциалов: примем $\varphi_Q = 0$, $\varphi_P = U$, $\varphi_N = \varphi$; уравнение баланса токов в узле N (втекает от P по двум ветвям, вытекает по двум ветвям к Q):

$$(U-\varphi)\left(\frac{1}{2R}+\frac{1}{R}\right) = \varphi\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{3R}\right) \;\Rightarrow\; \frac{3}{2}(U-\varphi) = \frac{4}{3}\varphi \;\Rightarrow\; \varphi = \frac{9U}{17},$$

что совпало с $U_{NQ} = 9U/17$.

Физический смысл: левая и правая группы делят напряжение U в отношении $8 : 9$, а амперметры только «выпрямляют» потенциалы нескольких точек и показывают, сколько тока перетекает между ними.

Ответ. $I_1 = \dfrac{5U}{17R} \approx 2{,}9$ А, $\quad I_2 = \dfrac{8U}{17R} \approx 4{,}7$ А.