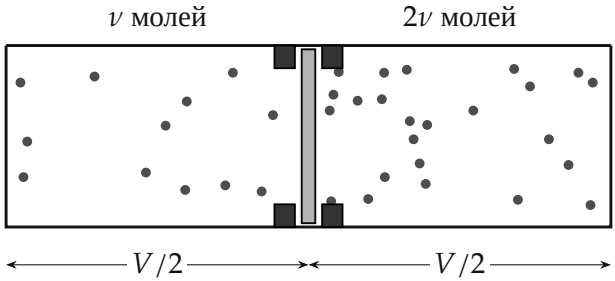
Поршень и адиабата

Задача 4. [Росатом 2022/23, отборочный этап, 11 класс, задача 4] «Поршень и адиабата».

Горизонтальный цилиндрический сосуд разделён на две равные части тонким подвижным поршнем. Вначале поршень удерживают, а в отсеках сосуда размещают ν и 2ν молей одноатомного идеального газа при одинаковой температуре. Затем поршень отпускают. Найти объёмы отсеков сосуда в тот момент, когда поршень достигнет максимальной скорости. Объём сосуда — V. Трением и теплообменом пренебречь. Считать, что поршень движется достаточно медленно так, что выполнены условия адиабатичности процессов, происходящих с газом в отсеках сосуда.

Указание. Для адиабатического процесса справедливо уравнение: $pV^{5/3} = \text{const}$.



Поясняющий рисунок (в условии рисунка нет): поршень в середине удерживают упорами; справа вдвое больше газа, значит, давление справа вдвое больше

▲ **Решение. Что происходит.** При равных температурах и равных объёмах давление газа пропорционально числу молей: справа оно вдвое больше. После освобождения поршень поедет в сторону меньшего давления — в отсек с ν молями. Он сжимает левый газ (давление слева растёт) и освобождает место правому (давление справа падает). Пока давление справа больше, поршень разгоняется; когда давления сравнятся, сила на поршень обратится в нуль, и скорость достигнет максимума — дальше он будет тормозиться. Главная идея: условие максимальной

скорости — равенство давлений, а объёмы при этом найдём из адиабатных уравнений для обоих газов.

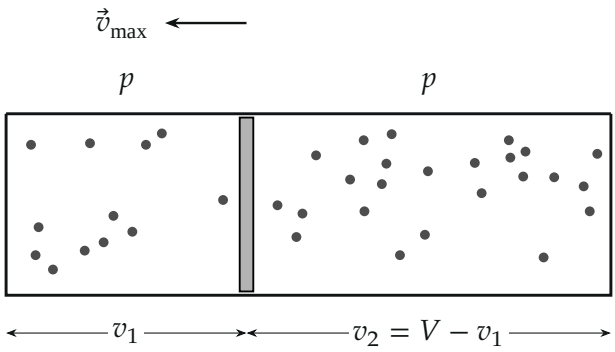
Обозначения. v_1 — объём отсека с ν молями (левого), $v_2 = V - v_1$ — объём отсека с 2ν молями (правого); толщиной поршня пренебрегаем. p_0 — начальное давление в левом отсеке, $2p_0$ — в правом; p — давление в обоих отсеках в момент максимальной скорости. Ось x направим влево (туда, куда едет поршень); S — площадь поршня, M — его масса.

1. Начальные давления. По уравнению Менделеева — Клапейрона $pV_0 = \nu RT$ при одинаковых T и $V_0 = V/2$ давление пропорционально числу молей: $p_1 = p_0$ слева и $p_2 = 2p_0$ справа. Это и задаёт направление движения поршня.

2. Когда скорость максимальна. Запишем второй закон Ньютона для поршня в проекции на ось x (трения нет, давление в каждом отсеке однородно, потому что поршень движется медленно):

$$Ma = (p_2 - p_1)\,S.$$

Пока $p_2 > p_1$, ускорение положительно, и скорость растёт; при $p_2 < p_1$ поршень тормозится. Значит, максимальная скорость достигается в момент, когда $p_2 = p_1 = p$ — ускорение впервые обращается в нуль.



Момент максимальной скорости: давления в отсеках равны, объёмы уже не равны (рисунок в масштабе ответа, $v_1 \approx 0{,}40\,V$); концентрации молекул различаются, потому что температуры газов разные

3. Адиабаты. Газ каждого отсека расширяется или сжимается адиабатно, поэтому $pV^{5/3} = \text{const}$ между начальным состоянием ($V/2$ и давление p_0 либо $2p_0$) и состоянием в момент максимума:

$$p\,v_1^{5/3} = p_0\Big(\frac{V}{2}\Big)^{5/3}, \qquad p\,v_2^{5/3} = 2p_0\Big(\frac{V}{2}\Big)^{5/3}.$$

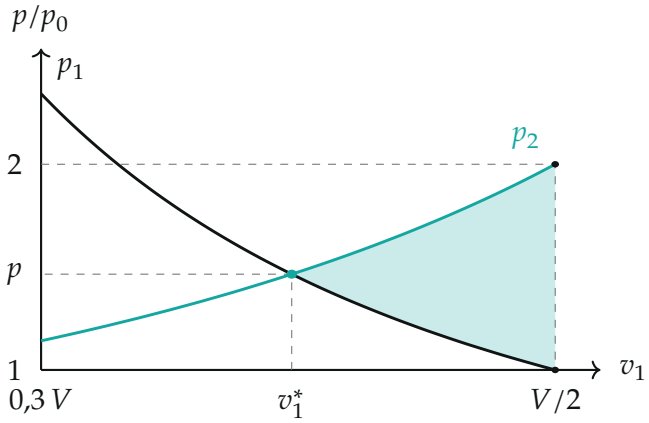
Давление p в обоих уравнениях одно и то же (см. пункт 2), и это даёт связь. Неизвестных осталось два (p и v_1), уравнений два.

4. Деление уравнений. Разделим первое на второе: p и $(V/2)^{5/3}$ сократятся:

$$\Big(\frac{v_1}{v_2}\Big)^{5/3} = \frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad \frac{v_1}{v_2} = 2^{-3/5}.$$

Вместе с $v_1 + v_2 = V$ получаем

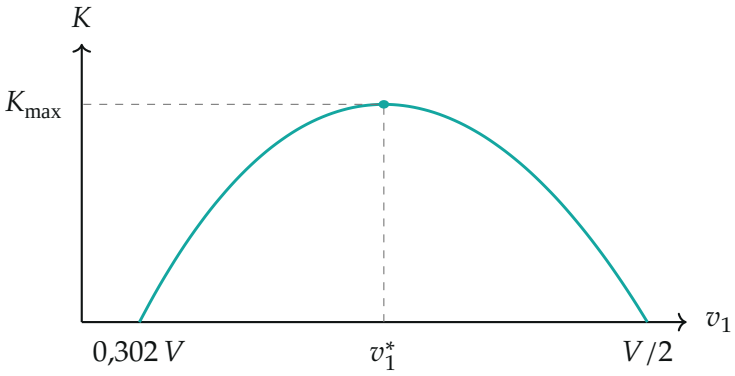
$$v_1 = \frac{V}{1+2^{3/5}} \approx 0{,}40\,V, \qquad v_2 = \frac{2^{3/5}\,V}{1+2^{3/5}} \approx 0{,}60\,V.$$



Давления в отсеках как функции объёма v_1 левого отсека (вертикальная шкала начинается с p_0): p_1 падает с ростом v_1, p_2 растёт; кривые пересекаются при $v_1^* = V/(1+2^{3/5})$. Бирюзовая область — работа результирующей силы, она идёт в кинетическую энергию поршня

Обратите внимание: объёмы отсеков не относятся как $1:2$. Если применить к газам $pV=\nu RT$ с одинаковой температурой, получится $v_1:v_2=1:2$, но к моменту максимума температуры уже разные: левый газ сжат и нагрет, правый расширился и остыл. В нашем решении температуры не нужны: мы использовали только адиабаты и равенство давлений.

Проверка и второй способ. Размерность: v_1 — доля V, объём. Предел: если бы газа справа было столько же (ν и ν), давления не различались бы, поршень остался бы на месте: $v_1/v_2=1$, а формула в общем виде $v_1/v_2=(\nu_1/\nu_2)^{3/5}$ даёт 1. Второй способ — энергетический. Для адиабатного газа $dU=-p\,dV_{\text{газа}}$, поэтому кинетическая энергия поршня $K=U_{\text{нач}}-U(v_1)$ имеет производную $dK/dv_1=p_1-p_2$ и максимальна там же, где $p_1=p_2$. Числа в единицах p_0V: начальная энергия газов $U_{\text{нач}}=\frac{3}{2}(p_0\frac{V}{2}+2p_0\frac{V}{2})=\frac{9}{4}p_0V=2{,}25\,p_0V$; при $v_1=0{,}3975\,V$ давление $p=1{,}466\,p_0$, энергия $U=\frac{3}{2}pV=2{,}199\,p_0V$, и поршень имеет $K=0{,}051\,p_0V>0$ — результат физически возможен.



Энергия поршня $K(v_1)$: максимум $K_{\max}\approx 0{,}051\,p_0V$ при v_1^*; поршень остановится при $v_1\approx 0{,}302\,V$ и вернётся — колебания около v_1^*

Физический смысл: поршень ведёт себя как груз на пружине: скорость наибольшая в точке $p_1=p_2$, дальше по инерции он колеблется около неё.

Ответ. В отсеке с ν молями $v_1=V/(1+2^{3/5})\approx 0{,}40\,V$; в отсеке с 2ν молями $v_2=V-v_1=2^{3/5}V/(1+2^{3/5})\approx 0{,}60\,V$.