Мираскоп

Задача 5. [Росатом 2022/23, отборочный этап, 11 класс, задача 5] «Мираскоп».

Оптическая игрушка «Мираскоп» представляет собой два вогнутых сферических зеркала (одно — с отверстием) и маленький предмет — игрушечную лягушку. Зеркала ставят друг на друга зеркальными поверхностями друг к другу так, что отверстие находится в верхнем зеркале, лягушку кладут в центр нижнего зеркала на его поверхность (левый рисунок; верхнее зеркало приподнято, чтобы было видно лягушку). В результате возникает оптическая иллюзия: кажется, что лягушка сидит посередине отверстия в верхнем зеркале, перевёрнутая по сравнению с настоящей лягушкой в горизонтальном направлении, не перевёрнутая в вертикальном и несколько больше самой лягушки. Иллюзия сохраняется и на фотографии (то, что мы видим на среднем рисунке, не лягушка, а иллюзия; «кусочек» настоящей лягушки виден в самой нижней части отверстия). Считая известным, что сферическое зеркало создаёт изображение любого источника, объясните: (1) почему возникает оптическая иллюзия? (2) почему иллюзия перевёрнута в горизонтальном направлении, но не перевёрнута в вертикальном? (3) Считая, что высота h каждого зеркала равна $R/4$ (см. рисунок), а высота лягушки $\delta = R/8$ (где R — радиус кривизны зеркал), оцените, во сколько раз иллюзия больше настоящей лягушки. Считать, что все лучи падают на поверхности зеркал под малыми углами (параксиальное приближение).



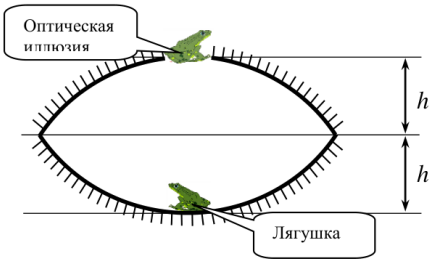


Рисунок из условия (фотографии и схема организаторов без изменений)

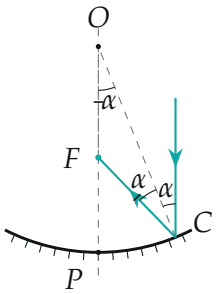
▲ **Решение.** **Что происходит.** Расстояние между вершинами зеркал $2h = R/2$ равно фокусному расстоянию $F = R/2$ (докажем ниже):

вершина нижнего зеркала, где сидит лягушка, — в фокусе верхнего, а центр отверстия — в фокусе нижнего. Лучи от лягушки уходят от верхнего зеркала параллельным пучком, нижнее зеркало собирает его в своём фокусе — в центре отверстия. Ориентацию и размер найдём, строя изображение зеркалами по очереди, по формуле зеркала.

Обозначения. R — радиус кривизны, F — фокусное расстояние, $h = R/4$ — высота зеркала, $\delta = R/8$ — высота лягушки; d и f — расстояния от предмета и от изображения до вершины зеркала ($f < 0$ у мнимого), $\Gamma = |f|/d$ — увеличение. Первое зеркало — верхнее, второе — нижнее. Углы малы (параксиальное приближение), поэтому на рисунках зеркала — параболы, от сфер в этом приближении неотличимые.

1. Фокусное расстояние. Луч, идущий параллельно главной оси на небольшой высоте, падает на зеркало в точке C. Нормаль к сфере — радиус OC, угол падения α равен углу между лучом и OC, а он же равен углу $\angle COP$ между осью и радиусом (лучи параллельны). Угол отражения тоже α, поэтому в треугольнике OCF (F — точка пересечения отражённого луча с осью) $\angle COF = \angle OCF = \alpha$: он равнобедренный, $OF = CF$. При малых α точка C близка к вершине P, так что $CF \approx PF$ и

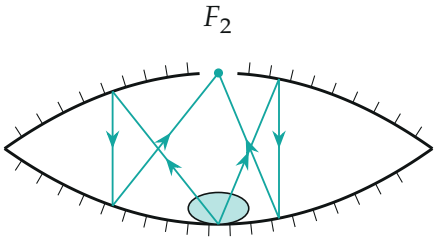
$$OF \approx PF \quad \Rightarrow \quad PF = \frac{R}{2}, \qquad F = \frac{R}{2}.$$



Зеркало радиуса R с центром O и вершиной P: луч, параллельный оси, отражается так, что $OF = CF$. Угол α взят крупным для наглядности; при малых α точка F стремится к середине отрезка OP

Верно и обратное: лучи из F после отражения идут параллельно оси.

2. Геометрия мираскопа (пункт 1 условия). Расстояние между вершинами зеркал $2h = R/2 = F$. Основание лягушки в вершине нижнего зеркала, то есть в фокусе верхнего: после верхнего зеркала лучи идут параллельно оси, падают на нижнее зеркало параллельно его оси и собираются в его фокусе — на расстоянии $F = 2h$ от его вершины, то есть в центре отверстия. Все лучи от лягушки сходятся в одной точке: изображение действительное, и глаз видит «лягушку» в отверстии.



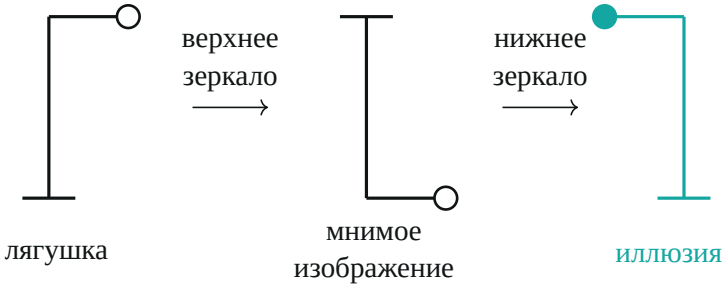
лягушка в точке F_1

Лучи от лягушки в F_1: после верхнего зеркала параллельны оси, после нижнего сходятся в F_2 (в масштабе: $R = 8$ клеток, $h = 2$)

3. Ориентация изображения (пункт 2 условия). Рассмотрим изображение зеркалами по очереди.

- Верхнее зеркало: предмет ближе фокуса, изображение мнимое, за зеркалом, увеличено, не перевёрнуто поперёк («право — лево» сохраняется). Вдоль оси порядок точек меняется (чем ближе точка к фокусу, тем дальше её изображение): «верх» и «низ» меняются местами.
- Нижнее зеркало: это изображение дальше его фокуса, поэтому получается действительное изображение, перевёрнутое поперёк («право — лево» меняется), а вдоль оси порядок снова меняется.

Итог: «верх — низ» перевёрнут дважды, то есть остался как у лягушки; «право — лево» перевёрнут один раз. Это то же самое, что повернуть лягушку на 180° вокруг вертикали: она смотрит в другую сторону, но не вверх ногами.



Вид сбоку (вертикаль — главная ось): кружок — голова, черта внизу — лапы. После верхнего зеркала фигура перевёрнута сверху вниз, после нижнего — ещё раз и отражена слева направо

4. Увеличение (пункт 3 условия). Верхняя точка лягушки отстоит от основания на $\delta = R/8$, то есть от верхнего зеркала на $d_1 = 2h - \delta = \dfrac{R}{2} - \dfrac{R}{8} = \dfrac{3R}{8}$. Для верхнего зеркала по формуле $\dfrac{1}{d} + \dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{F}$ при $F = \dfrac{R}{2}$:

$$\frac{1}{f_1} = \frac{2}{R} - \frac{8}{3R} = -\frac{2}{3R} \quad \Rightarrow \quad f_1 = -\frac{3R}{2}, \qquad \Gamma_1 = \frac{|f_1|}{d_1} = \frac{3R/2}{3R/8} = 4.$$

Знак минус — изображение мнимое, за зеркалом на расстоянии $3R/2$. Для нижнего зеркала это изображение — предмет на расстоянии $d_2 = 2h + |f_1| = \dfrac{R}{2} + \dfrac{3R}{2} = 2R$:

$$\frac{1}{f_2} = \frac{2}{R} - \frac{1}{2R} = \frac{3}{2R} \quad \Rightarrow \quad f_2 = \frac{2R}{3}, \qquad \Gamma_2 = \frac{f_2}{d_2} = \frac{2R/3}{2R} = \frac{1}{3}.$$

Общее увеличение — произведение:

$$\Gamma = \Gamma_1\Gamma_2 = 4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

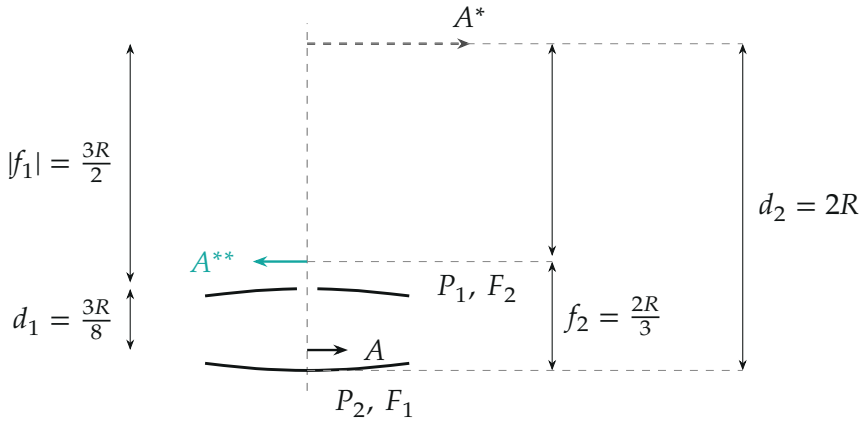


Схема вдоль оси в масштабе ($R = 8$ клеток; поперечные размеры втрое крупнее). A — лягушка (высота δ над вершиной P_2), A^* — мнимое изображение в верхнем зеркале (вчетверо больше, не перевёрнуто), A^{**} — действительное изображение в нижнем (в $4/3$ раза больше лягушки, перевёрнуто поперёк)

Изображение верхней точки лягушки лежит на высоте $2R/3$ над вершиной нижнего зеркала, то есть на $R/6$ выше плоскости отверстия ($R/2$); изображение её основания — в самом отверстии: поэтому иллюзия «сидит» в отверстии.

Обратите внимание: $4/3$ — увеличение верхней точки лягушки. На высоте δ' над основанием $\Gamma = F/(F - \delta')$: у лап $\Gamma = 1$, на высоте δ — $4/3$; это и есть оценка «во сколько раз больше».

Проверка. Γ безразмерно. Общая формула: $\Gamma = \Gamma_1\Gamma_2 = \dfrac{F}{\delta} \cdot \dfrac{\delta}{F - \delta} = \dfrac{F}{F - \delta} = \dfrac{1/2}{3/8} = \dfrac{4}{3}$. Второй способ — построение на рисунке: стрелка A^{**} в $0{,}8/0{,}6 = 4/3$ раза длиннее стрелки A (а A^* — в 4 раза). Предел $\delta \to 0$: $\Gamma \to 1$.

Физический смысл: верхнее зеркало увеличивает в 4 раза, нижнее уменьшает в 3 раза — остаётся $4/3$.

Ответ. 1) Лягушка в фокусе верхнего зеркала, лучи после него параллельны, нижнее зеркало собирает их в центре отверстия — действительное изображение. 2) Вдоль оси порядок точек сохранён (два переворота), поперёк перевёрнут. 3) $\Gamma = 4/3$.