Тело на стенке конуса

Задача 1. [Росатом 2022/23, отборочный этап, 11 класс, очный тур 1, задача 1] «Тело на стенке конуса».

Небольшое тело движется по внутренней поверхности вертикального конуса, описывая горизонтальную окружность радиуса r с центром на оси конуса (см. рисунок). Найти угловую скорость тела, если угол между осью конуса и его образующей равен α. Поверхность конуса гладкая, влиянием силы сопротивления воздуха пренебречь.

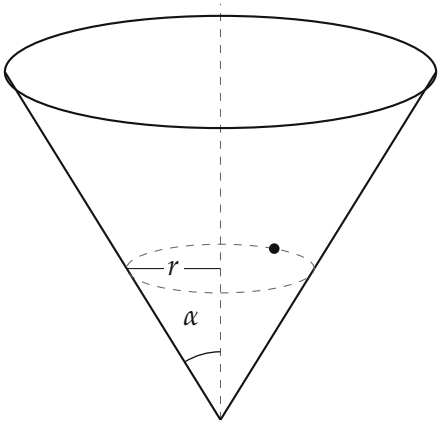
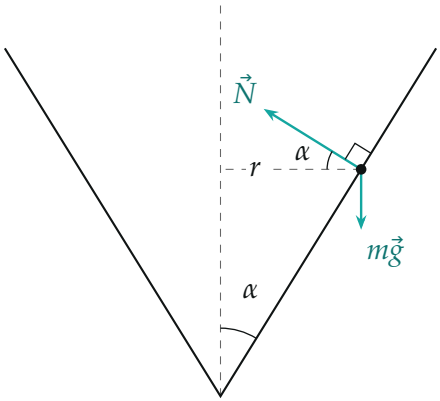


Рисунок условия: ось конуса (пунктир), окружность, по которой движется тело, её радиус r и угол α между осью и образующей

▲ **Решение. Что происходит.** Тело равномерно кружит по окружности в горизонтальной плоскости, поэтому его ускорение направлено горизонтально, к оси конуса, и равно $\omega^2 r$. Поверхность гладкая, значит, сил всего две: тяжесть и реакция стенки, перпендикулярная стенке. Главная идея: сумма этих двух сил обязана быть горизонтальной и равной $m\omega^2 r$. Вертикальные составляющие при этом должны уравновесить друг друга: тело не поднимается и не опускается.

Обозначения. m — масса тела, $\vec{N}$ — реакция стенки, ω — угловая скорость. Ось x направим горизонтально к оси конуса (вдоль ускорения), ось y — вертикально вверх. Тогда в уравнении для y ускорения нет.

1. Силы и угол нормали. Проведём плоскость, содержащую ось конуса и тело (рисунок). Реакция $\vec{N}$ перпендикулярна образующей и направлена внутрь конуса. Образующая составляет с вертикалью угол α; нормаль перпендикулярна образующей, а горизонталь перпендикулярна вертикали, поэтому нормаль составляет с горизонталью тот же угол α (углы со взаимно перпендикулярными сторонами равны). Значит, проекции $\vec{N}$ на оси: $N_x = N\cos\alpha$ и $N_y = N\sin\alpha$.



Сечение конуса плоскостью через ось: $m\vec{g}$ вниз, $\vec{N}$ перпендикулярна образующей (отмечен прямой угол), угол между $\vec{N}$ и горизонталью равен α; стрелки нарисованы в масштабе: $N = mg/\sin\alpha$

2. Второй закон Ньютона. Запишем его для тела векторно: $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$, где $\vec{a}$ — центростремительное ускорение, $a = \omega^2 r$. Спроецируем на оси: на y ускорения нет (высота не меняется), на x ускорение равно $\omega^2 r$:

$$y:\ \ 0 = N\sin\alpha - mg, \qquad x:\ \ m\omega^2 r = N\cos\alpha.$$

Из первого уравнения $N = \dfrac{mg}{\sin\alpha}$: вертикальная составляющая $\vec{N}$ уравновешивает силу тяжести.

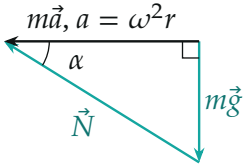
3. Угловая скорость. Подставим N во второе уравнение:

$$m\omega^2 r = \frac{mg}{\sin\alpha}\cos\alpha = mg\operatorname{ctg}\alpha \quad\Longrightarrow\quad \omega = \sqrt{\frac{g\operatorname{ctg}\alpha}{r}}.$$

Масса тела сократилась: на таком конусе на этой окружности любое тело вращается с одной и той же ω.

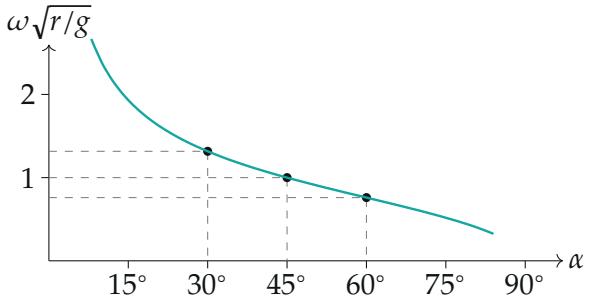
Обратите внимание. Угол α дан между осью и образующей, то есть отсчитывается от вертикали, а не от горизонтали. Из-за этого $N_y = N\sin\alpha$, а $N_x = N\cos\alpha$; если перепутать, получится $\operatorname{tg}\alpha$ вместо $\operatorname{ctg}\alpha$.

Проверка. Размерность: $[g/r] = \text{с}^{-2}$, корень даёт с^{-1}. Второй способ — треугольник сил. Равнодействующая $m\vec{g} + \vec{N}$ горизонтальна и равна $m\omega^2 r$, поэтому $m\vec{g}$, $\vec{N}$ и $m\vec{a}$ образуют прямоугольный треугольник; в нём угол при вершине между $\vec{N}$ и горизонтальным катетом равен α, откуда $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{mg}{m\omega^2 r}$ — тот же результат.



Треугольник сил: $m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}$; вертикальный катет mg, горизонтальный $m\omega^2 r = mg\operatorname{ctg}\alpha$

Предельные случаи. При $\alpha \to 90°$ стенка становится горизонтальной плоскостью: $\vec{N}$ вертикальна, горизонтальной силы нет, и $\omega \to 0$ — формула даёт $\operatorname{ctg} 90° = 0$. При $\alpha \to 0$ конус превращается в вертикальную трубу, и для кружения по окружности радиуса r нужна всё большая ω — формула даёт $\omega \to \infty$.



Зависимость $\omega\sqrt{r/g} = \sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}$ от α; при $\alpha = 45°$ получаем $\omega = \sqrt{g/r}$

Смысл: чем «круче» конус (меньше α), тем сильнее стенка прижимает тело и тем быстрее оно должно вращаться, чтобы не сползти вниз по гладкой стенке.

Ответ. $\omega = \sqrt{\dfrac{g \operatorname{ctg} \alpha}{r}}$.