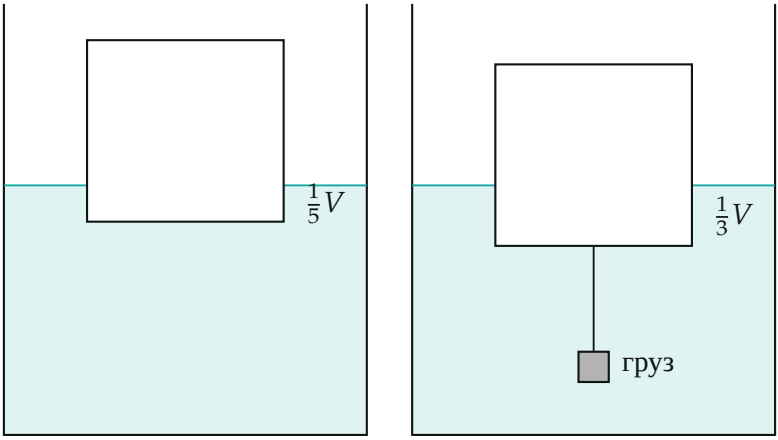
Поплавок с леской

Задача 2. [Росатом 2022/23, отборочный этап, 11 класс, очный тур 1, задача 2] «Поплавок с леской».

К поплавку массой m привязана леска с грузом. При этом поплавок погружен в воду на третью часть своего объема. Найти силу натяжения лески, если свободно плавающий поплавок погружен в воду на пятую часть своего объема.



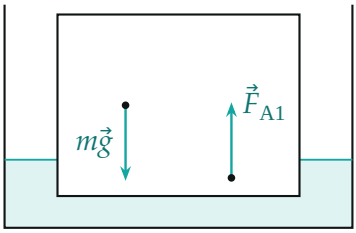
Поясняющий рисунок: погружено $\frac{1}{5}$ объёма у свободного и $\frac{1}{3}$ у поплавка с грузом

▲ **Решение. Что происходит.** Поплавок в обоих случаях покоится, значит, сумма сил на него равна нулю. Сила Архимеда пропорциональна погружённому объёму: $F_\text{A} = \rho g V_\text{погр}$. Ни плотность воды ρ, ни объём поплавка V не даны, но в обеих записях они стоят одним произведением $\rho g V$ — «выталкивающая сила при полном погружении». Свободный поплавок позволит выразить это произведение через mg, а с леской — найти натяжение.

Обозначения. V — объём поплавка, ρ — плотность воды, $F_{\text{A}1}$ и $F_{\text{A}2}$ — силы Архимеда в первом (свободный поплавок) и втором (с леской) случаях, T — сила, с которой леска тянет поплавок. Ось y — вертикально вверх.

1. Свободный поплавок. Закон равновесия (второй закон Ньютона при $\vec{a} = 0$) в проекции на y: сила Архимеда вверх, сила тяжести вниз. Сила Архимеда равна весу вытесненной воды, то есть воды в объёме погружённой пятой части:

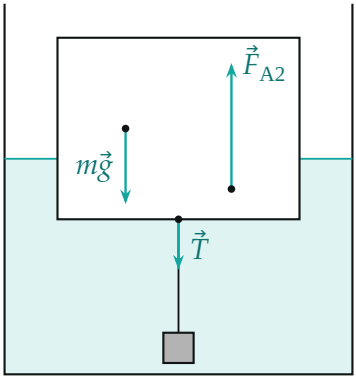
$$F_{\text{A1}} - mg = 0, \qquad F_{\text{A1}} = \rho g \cdot \frac{1}{5} V \quad \Longrightarrow \quad \rho g V = 5\, mg.$$



Свободный поплавок: $\vec{F}_{A1}$ и $m\vec{g}$ равны по модулю

2. Поплавок с леской. Теперь на поплавок действуют три силы: сила Архимеда вверх (погружена $\frac{1}{3}$ объёма), сила тяжести вниз и натяжение лески вниз — леска привязана снизу, и груз тянет её вниз. Условие равновесия в проекции на y:

$$F_{\text{A2}} - mg - T = 0, \qquad F_{\text{A2}} = \rho g \cdot \frac{1}{3} V = \frac{1}{3} \cdot 5mg = \frac{5}{3}\, mg.$$



Поплавок с леской: длины стрелок — mg, $\frac{5}{3}mg$, $\frac{2}{3}mg$

3. Натяжение лески. Из уравнения второго пункта:

$$T = F_{A2} - mg = \frac{5}{3}mg - mg = \frac{2}{3}mg.$$

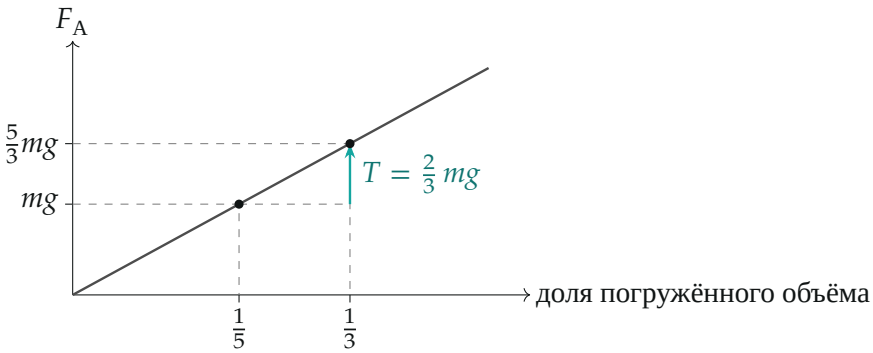
Знак: $T > 0$ — леска натянута и тянет поплавок вниз, как мы и предположили.

Обратите внимание. T — это не вес груза. Груз тоже в воде: часть его веса уравновешена его силой Архимеда, поэтому масса груза не нужна.

Проверка. Размерность: mg — сила. Второй способ — через «лишнюю» погружённую часть. Без лески поплавок уравновешен при погружении $\frac{1}{5}V$; всё, что глубже, уравновешивает леску. Лишняя доля $\frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$ даёт выталкивающую силу, равную T:

$$T = \rho g \cdot \frac{2}{15}V = \frac{2}{15} \cdot 5mg = \frac{2}{3}mg.$$

То же. Предельные случаи: при погружении $\frac{1}{5}V$ получаем $T = 0$ (лески нет); при полном погружении ($F_A = 5mg$) было бы $T = 4mg$.



Сила Архимеда растёт линейно с долей погружённого объёма; T — её избыток над mg при погружении на $\frac{1}{3}$

Смысл: натяжение лески — то, чего не хватает свободному поплавку, чтобы осесть глубже.

Ответ. $T = \frac{2}{3}mg$.