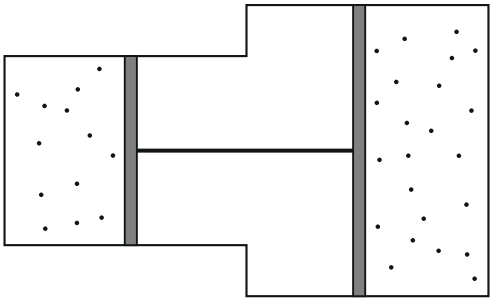
Сосуд с двумя поршнями

Задача 3. [Росатом 2022/23, отборочный этап, 11 класс, очный тур 1, задача 3] «Сосуд с двумя поршнями».

Сосуд образован двумя спаянными цилиндрическими трубами одинаковой длины с площадями сечения S и $2S$. В сосуд вставили тонкие поршни, связанные несжимаемым стержнем, длина которого равна половине длины сосуда, и воздух из пространства между поршнями откачали. После этого трубы запаяли снаружи, оставив между поршнями и стенками сосуда какое-то количество газа (см. рисунок). Известно, что когда температуры газов снаружи от поршней одинаковы, поршни располагаются на одинаковых расстояниях от стыка труб. Когда абсолютную температуру газа в левом отсеке изменили до некоторого значения T_1, а газа в правом отсеке — до некоторого значения T_2, поршни сместились вправо на половину расстояния от поршней до стыка труб в начальном положении. Найти отношение T_1/T_2.



▲ **Решение. Что происходит.** Два поршня и стержень — одно жёсткое тело, между поршнями вакуум, поэтому на это тело вдоль оси действуют только две силы: давление газа слева на узкий поршень и давление газа справа на широкий. Они должны уравновешивать друг друга — и в начале, и в конце. Это связывает давления в отсеках: $p_{\text{лев}} = 2p_{\text{прав}}$ всегда. Дальше нужно только уравнение состояния каждого газа, ведь трубы запаяны и количество газа в каждом отсеке не меняется.

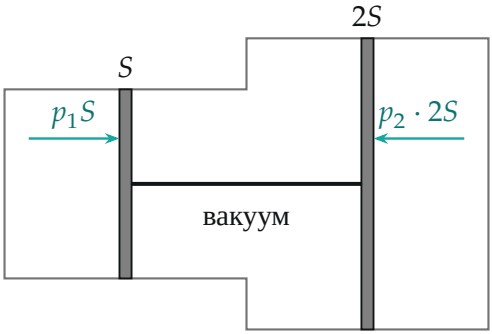
Обозначения. l — длина каждой трубы (длина сосуда $2l$, стержня l); p_1, p_2 — давления газа в левом и правом отсеках; ν_1, ν_2 — количества

вещества; T — общая начальная температура; T_1, T_2 — конечные температуры.

1. Равновесие поршней со стержнем. Для тела «два поршня и стержень» в проекции на ось сосуда: газ слева давит на поршень площадью S вправо с силой $p_1 S$, газ справа — на поршень площадью $2S$ влево с силой $p_2 \cdot 2S$; поскольку тело неподвижно (в конечном состоянии тоже, процесс медленный), сумма сил равна нулю:

$$p_1 S = p_2 \cdot 2S \quad \Longrightarrow \quad p_1 = 2p_2.$$

Это соотношение верно и в начале, и в конце: площади поршней не меняются.



Силы на тело из двух поршней и стержня: $p_1 S$ и $p_2 \cdot 2S$ равны по модулю, поэтому давления относятся как 2 : 1

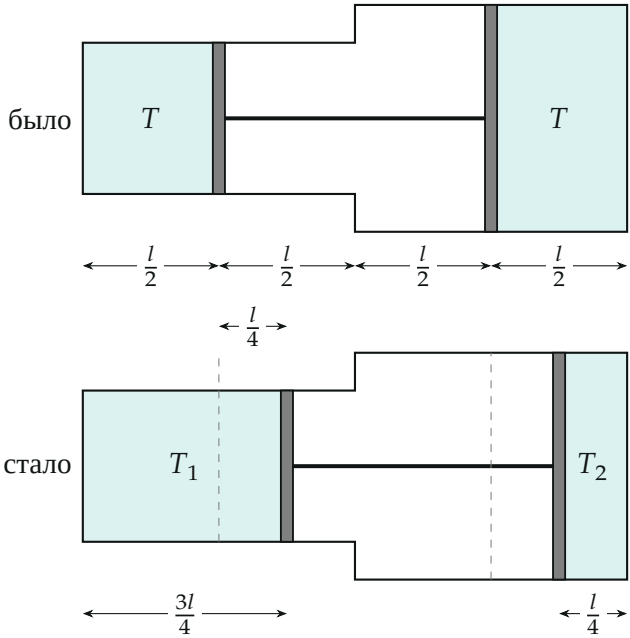
2. Начальное состояние: количества газа. Поршни стоят на расстоянии $\frac{l}{2}$ от стыка, значит, газ слева занимает длину $\frac{l}{2}$ узкой трубы, а газ справа — длину $l - \frac{l}{2} = \frac{l}{2}$ широкой: $V_1 = \frac{Sl}{2} =: V_0$, $V_2 = 2S \cdot \frac{l}{2} = 2V_0$. Уравнение состояния для каждого газа (T — одна и та же):

$$p_1 V_0 = \nu_1 RT, \qquad p_2 \cdot 2V_0 = \nu_2 RT.$$

Подставим $p_1 = 2p_2$: правые части равны, то есть $\nu_1 = \nu_2 = \nu$. Газов поровну — и в конце останется поровну.

3. Конечное состояние: объёмы. Поршни сместились вправо на половину расстояния до стыка, то есть на $\frac{l}{4}$. Левый газ расширился: его

длина стала $\frac{l}{2}+\frac{l}{4}=\frac{3l}{4}$, объём $V_1'=\frac{3}{2}V_0$. Правый сжался: длина $l-\frac{3l}{4}=\frac{l}{4}$, объём $V_2'=2S\cdot\frac{l}{4}=V_0$.



Было и стало: поршни смещены вправо на $\frac{l}{4}$ (штриховые линии — прежние положения)

4. Конечное состояние: давления и ответ. Уравнение состояния для газов в конечном состоянии (число молей то же ν):

$$p_1'\cdot\frac{3}{2}V_0=\nu RT_1,\qquad p_2'\cdot V_0=\nu RT_2.$$

Разделим первое уравнение на второе и учтём равновесие в конечном состоянии $p_1'=2p_2'$ (пункт 1):

$$\frac{p_1'}{p_2'}\cdot\frac{3}{2}=\frac{T_1}{T_2}\quad\Longrightarrow\quad\frac{T_1}{T_2}=2\cdot\frac{3}{2}=3.$$

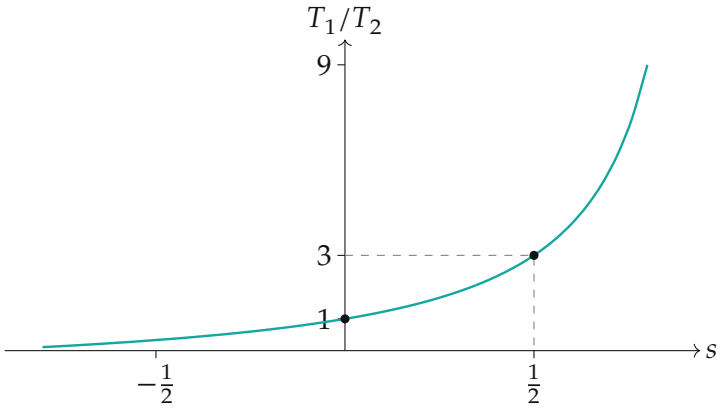
Обратите внимание. Давления p_1' и p_2' после нагрева неизвестны и по отдельности не нужны: нужно только их отношение, а оно известно

из равновесия. Количества газа не даны, но сократились: из начального равновесия мы показали, что $\nu_1 = \nu_2$.

Проверка. Размерность: отношение температур безразмерно. Второй способ — общий сдвиг. Пусть поршни сместились вправо на долю s от $\frac{l}{2}$. Объёмы: $V_1' = (1+s)V_0$, $V_2' = 2(1-s)V_0$; те же уравнения состояния и $p_1' = 2p_2'$ дают

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{p_1'V_1'}{p_2'V_2'} = 2 \cdot \frac{1+s}{2(1-s)} = \frac{1+s}{1-s}.$$

При $s = \frac{1}{2}$ получаем 3 — как выше. Предельные случаи: $s = 0$ (поршни не сдвинулись) — $T_1/T_2 = 1$, температуры одинаковы, как в начале; $s \to 1$ — правый газ сжимается в ничто, и нужно $T_1/T_2 \to \infty$.



Отношение температур, при котором поршни сместятся вправо на долю s от $\frac{l}{2}$; точка $s = \frac{1}{2}$ даёт ответ 3

Смысл: левый газ расширился, и его давление при той же температуре упало бы; чтобы оно по-прежнему вдвое превышало давление сжатого правого газа, левый газ нужно нагреть сильнее правого.

Ответ. $\dfrac{T_1}{T_2} = 3.$