Труба с намотанной нитью

Задача 4. [Росатом 2022/23, отборочный этап, 11 класс, очный тур 1, задача 4] «Труба с намотанной нитью».

На массивную трубу намотали нить. Затем трубу положили на шероховатую наклонную плоскость с углом наклона α так, что ось трубы параллельна основанию плоскости. Трубу удерживают в покое, прикладывая к концу нити силу, направленную вертикально вверх (см. рисунок). При каком коэффициенте трения между трубой и плоскостью возможно такое равновесие?

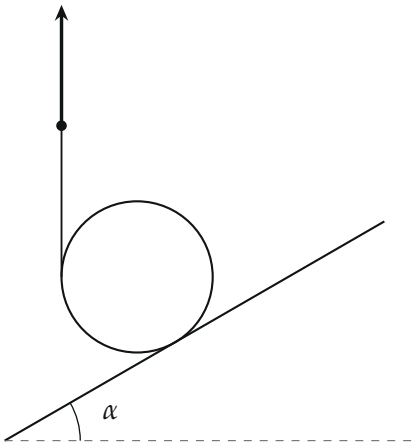
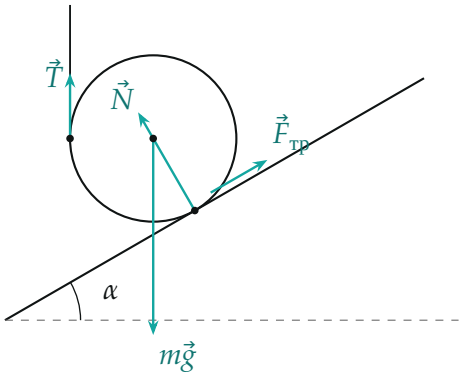


Рисунок условия: нить сходит с трубы в её крайней левой точке вертикально вверх; ось трубы перпендикулярна плоскости рисунка

▲ **Решение. Что происходит.** Труба неподвижна, поэтому и сумма сил, и сумма моментов относительно любой оси равны нулю. Сил четыре: тяжесть $m\vec{g}$, реакция плоскости $\vec{N}$, трение покоя $\vec{F}_{\text{тр}}$ и натяжение нити $\vec{T}$. Условия равновесия определят T, $F_{\text{тр}}$ и N, а затем остаётся вспомнить, что трение покоя не превосходит μN: отсюда придёт условие на μ.

Обозначения. m — масса трубы, R — её радиус, C — центр сечения (ось трубы), B — точка касания трубы и плоскости. Нить касается трубы в крайней левой точке A, где касательная вертикальна, поэтому

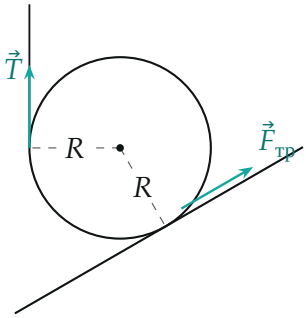
$\vec{T}$ направлена вертикально вверх; трение направлено вдоль плоскости вверх (труба стремится скатиться вниз).



Силы на трубу ($\vec{N}$ идёт через центр C); длины стрелок — по найденным ниже модулям при $\alpha = 30°$

1. Моменты относительно оси трубы. Выберем ось через центр C: тогда $m\vec{g}$ (приложена в C) и $\vec{N}$ (радиус к точке касания перпендикулярен плоскости, поэтому линия $\vec{N}$ проходит через C) моментов не дают, останутся только $\vec{T}$ и $\vec{F}_{тр}$. Обе силы касательны к трубе, плечо каждой равно R; $\vec{T}$ крутит трубу по часовой стрелке, $\vec{F}_{тр}$ — против:

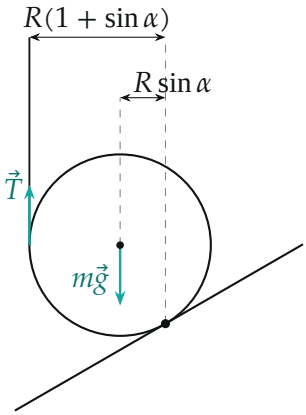
$$TR = F_{тр}R \quad \Longrightarrow \quad T = F_{тр}.$$



Плечи сил $\vec{T}$ и $\vec{F}_{тр}$ относительно центра C равны радиусу R

2. Моменты относительно линии касания. Теперь ось через точку B: исчезают моменты $\vec{N}$ и $\vec{F}_{\text{тр}}$ (они приложены в B), остаются $m\vec{g}$ и $\vec{T}$. Радиус CB перпендикулярен плоскости, значит, составляет угол α с вертикалью, и точка B смещена от центра по горизонтали на $R\sin\alpha$. Плечо силы тяжести — горизонтальное расстояние между вертикальными линиями через C и B: $R\sin\alpha$; плечо $\vec{T}$ — расстояние от нити до B: $R + R\sin\alpha$. Сила тяжести крутит против часовой стрелки, натяжение — по часовой:

$$T\,R(1+\sin\alpha) = mg\,R\sin\alpha \quad\Longrightarrow\quad T = F_{\text{тр}} = \frac{mg\sin\alpha}{1+\sin\alpha}.$$



Плечи $m\vec{g}$ и $\vec{T}$ относительно точки касания B: $R\sin\alpha$ и $R(1+\sin\alpha)$

3. Реакция плоскости. Спроецируем равновесие сил на ось, перпендикулярную плоскости (на ней нет трения; $\vec{T}$ и $m\vec{g}$ вертикальны и составляют угол α с этой осью):

$$N - mg\cos\alpha + T\cos\alpha = 0 \quad\Longrightarrow\quad N = (mg - T)\cos\alpha = \frac{mg\cos\alpha}{1+\sin\alpha}.$$

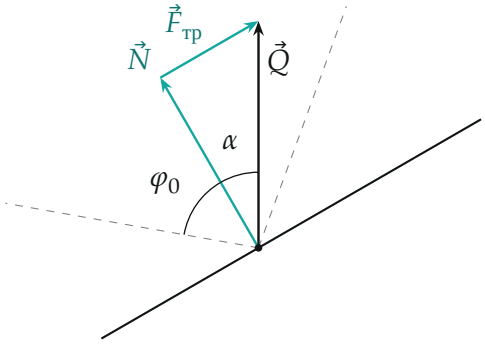
Проверим себя проекцией на ось вдоль плоскости вверх: $F_{\text{тр}} - mg\sin\alpha + T\sin\alpha = 0$, то есть $F_{\text{тр}} = (mg - T)\sin\alpha = \dfrac{mg\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$ — совпало с результатом пункта 2.

4. Условие покоя. Трение покоя может быть любым вплоть до μN, поэтому труба не скользит, пока $F_{\text{тр}} \le \mu N$:

$$\frac{mg\sin\alpha}{1+\sin\alpha} \le \mu \frac{mg\cos\alpha}{1+\sin\alpha} \quad \Longrightarrow \quad \mu \ge \operatorname{tg}\alpha.$$

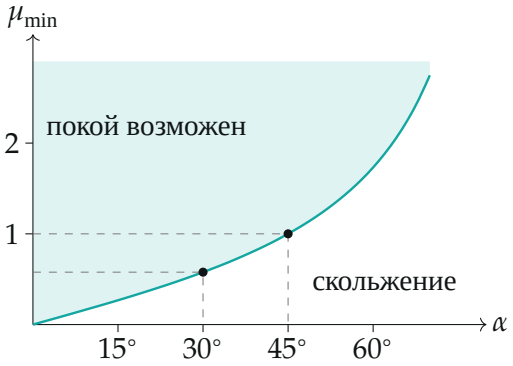
Обратите внимание. Для покоящейся трубы $F_{\text{тр}} \le \mu N$, а не $F_{\text{тр}} = \mu N$: трение равно T и подстраивается под неё, а μN — только предел. Равенство получилось бы лишь на границе равновесия.

Проверка. Размерность: T, $F_{\text{тр}}$, N — силы, μ безразмерен. Второй способ — без вычислений моментов. Силы $m\vec{g}$ и $\vec{T}$ вертикальны, значит, и полная реакция плоскости $\vec{Q} = \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}$ должна быть вертикальной (её модуль $mg - T$). Нормаль к плоскости составляет с вертикалью угол α, поэтому $\vec{Q}$ отклонена от нормали на α, и $F_{\text{тр}}/N = \operatorname{tg}\alpha$. Реакция шероховатой плоскости не может отклоняться от нормали больше, чем на угол трения φ_0, $\operatorname{tg}\varphi_0 = \mu$ — то же условие $\operatorname{tg}\alpha \le \mu$, и от нити оно не зависит.



Реакция плоскости $\vec{Q} = \vec{N} + \vec{F}_{тр}$ вертикальна и отклонена от нормали на α; пунктир — границы конуса трения (угол φ_0, $\operatorname{tg}\varphi_0 = \mu$)

Предельные случаи: при $\alpha \to 0$ (горизонтальная плоскость) $T \to 0$, $F_{\text{тр}} \to 0$ и $\mu \ge 0$ — трение не нужно; при $\alpha \to 90°$ нормальная реакция $N \to 0$, и удержать трубу трением нельзя ни при каком конечном μ ($\operatorname{tg}\alpha \to \infty$).



Наименьший коэффициент трения $\mu_{\min} = \operatorname{tg}\alpha$ (точки вычислены): выше кривой труба в покое, ниже — скользит

Смысл: нить убирает вращение трубы, но условие покоя остаётся таким же, как у бруска на наклонной плоскости: плоскость должна держать вертикальную силу, а это возможно, пока $\mu \geq \operatorname{tg}\alpha$.

Ответ. $\mu \geq \operatorname{tg}\alpha$.