Заряженная пластинка во внешнем поле

Задача 5. [Росатом 2022/23, отборочный этап, 11 класс, очный тур 1, задача 5] «Заряженная пластинка во внешнем поле».

Тонкую равномерно заряженную диэлектрическую пластинку с площадью S внесли в однородное внешнее электрическое поле и расположили перпендикулярно силовым линиям этого поля. В результате с одной стороны от пластинки установилось электрическое поле с напряженностью E, с другой — с напряженностью $2E$ (см. рисунок). Найти заряд пластинки и напряженность внешнего электрического поля.

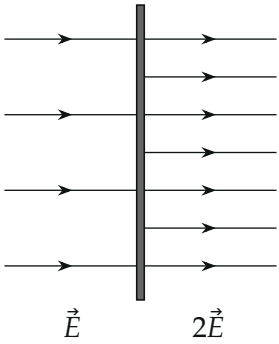


Рисунок условия: линии поля слева (напряжённость E) и справа (напряжённость $2E$, линии вдвое гуще) от пластинки

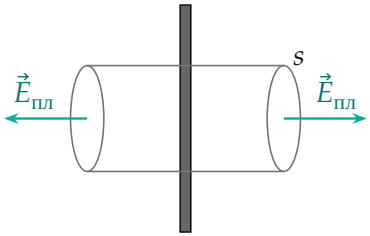
▲ **Решение. Что происходит.** Поле у пластинки — суперпозиция двух полей: однородного внешнего $\vec{E}_0$ (одинакового по обе стороны) и собственного поля заряженной пластинки. Собственное поле тонкой плоской пластинки по модулю одинаково с обеих сторон, но направлено поразному: от пластинки, если заряд положительный, и к ней, если отрицательный. Значит, слева поле пластинки вычитается из внешнего, а справа прибавляется (или наоборот) — поэтому с двух сторон и получились разные E и $2E$. Сложение и вычитание этих двух уравнений даст оба неизвестных.

Обозначения. Q — заряд пластинки (знак неизвестен), E_0 — проекция внешнего поля на ось x (знак неизвестен), $E_{\text{пл}}$ — модуль поля пластинки. Ось x направим вдоль линий на рисунке, вправо; тогда проекции суммарного поля слева и справа равны $+E$ и $+2E$.

1. Поле заряженной пластинки. Применим теорему Гаусса к цилиндру с площадью основания s, ось которого перпендикулярна пластинке, а основания расположены симметрично по обе стороны от неё (рисунок). По симметрии поле пластинки перпендикулярно ей и одинаково по модулю в обоих основаниях; через боковую поверхность потока нет. Заряд внутри цилиндра — заряд кусочка пластинки площадью s, то есть σs, где $\sigma = Q/S$ — поверхностная плотность заряда:

$$2E_{\text{пл}}\, s = \frac{Qs}{\varepsilon_0 S} \quad \Longrightarrow \quad E_{\text{пл}} = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S}.$$

При $Q > 0$ поле направлено от пластинки в обе стороны, то есть слева вдоль $-x$, справа вдоль $+x$.

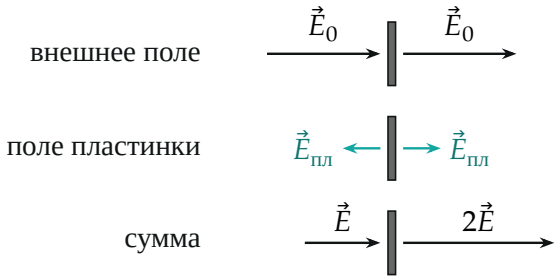


Цилиндр Гаусса с основаниями площади s по обе стороны пластинки: поток $\vec{E}_{пл}$ через два основания

2. Суперпозиция. Запишем сумму внешнего поля и поля пластинки слева и справа от неё, в проекциях на ось x со знаками; знак Q и E_0 тогда определится из решения, а не угадывается:

$$\text{слева: } E_0 - \frac{Q}{2\varepsilon_0 S} = E, \qquad \text{справа: } E_0 + \frac{Q}{2\varepsilon_0 S} = 2E.$$

Поле пластинки слева направлено влево (при $Q > 0$), поэтому оно входит в левое уравнение со знаком минус.



Суперпозиция: внешнее поле $\vec{E}_0$ (одинаково по обе стороны), поле пластинки $\vec{E}_{пл}$ (при $Q > 0$ направлено от пластинки) и сумма; длины стрелок в масштабе, $E_0 = \frac{3}{2}E$, $E_{пл} = \frac{1}{2}E$

3. Решение. Сложим уравнения: $2E_0 = 3E$, откуда $E_0 = \dfrac{3}{2}E > 0$ — внешнее поле направлено вправо. Вычтем левое из правого: $\dfrac{Q}{\varepsilon_0 S} = E$, откуда

$$Q = \varepsilon_0 SE > 0, \qquad E_{пл} = \frac{E}{2}.$$

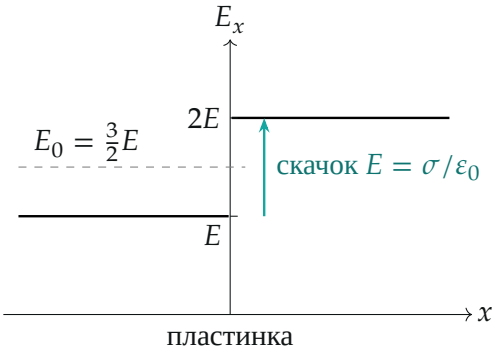
Знак словами: заряд пластинки положителен, так как справа, куда направлено внешнее поле, суммарное поле больше.

Обратите внимание. Две полученные величины — «среднее» и «разность»: внешнее поле равно полусумме полей по сторонам, $E_0 = \frac{E+2E}{2}$, а заряд определяется скачком поля на пластинке. Поле диэлектрической пластинки вне неё складывается только из внешнего поля и поля её свободного заряда: связанные заряды на двух гранях тонкой пластинки равны и противоположны, их поля вне пластинки гасят друг друга.

Проверка. Размерность: $\varepsilon_0 SE$ — (Ф/м)·м^2·(В/м)=Ф·В=Кл. Второй способ — через скачок поля. Теорема Гаусса для тонкого цилиндра даёт: нормальная составляющая поля скачком меняется на σ/ε_0, $\sigma = Q/S$, и это не зависит от внешнего поля (он по обе стороны один и тот же):

$$\frac{Q}{\varepsilon_0 S} = 2E - E \quad \Longrightarrow \quad Q = \varepsilon_0 SE, \qquad E_0 = \frac{E + 2E}{2} = \frac{3}{2}E.$$

Результат тот же. Предел: при равных полях слева и справа скачка нет, $Q = 0$.



Проекция поля на ось x вдоль линии, перпендикулярной пластинке: на пластинке она терпит скачок $E = \sigma/\varepsilon_0$, а внешнее поле $\frac{3}{2}E$ лежит посередине

Смысл: по линиям поля слева и справа видно разность E и среднее $\frac{3}{2}E$; разность (σ/ε_0) — это заряд пластинки, среднее — внешнее поле.

Ответ. $Q = \varepsilon_0 SE > 0$ (заряд положительный); $E_0 = \dfrac{3}{2}E$, направлена в ту же сторону, что и линии на рисунке (вправо).