Тело на доске

Задача 6. [Росатом 2022/23, отборочный этап, 11 класс, очный тур 1, задача 6] «Тело на доске».

Точечное тело положили на край доски и сообщили ему и доске одинаковые скорости v_0 (см. рисунок). Коэффициент трения между телом и доской равен μ, между доской и поверхностью — 2μ. Известно, что массы тела и доски одинаковы, и что тело в процессе движения не соскальзывает с доски. Найти перемещение тела относительно доски.

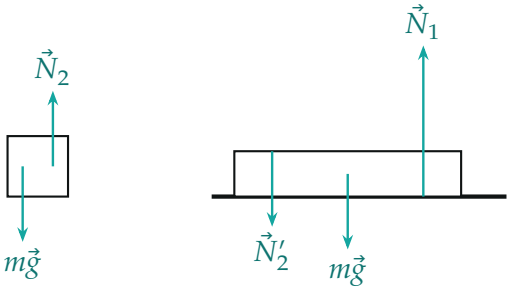


Рисунок условия: тело на левом конце доски; тело и доска движутся вправо со скоростью v_0

▲ **Решение. Что происходит.** Тело и доска стартуют с одной скоростью, но доску тормозит пол, да ещё и вдвое «жёстче», чем может тормозить тело трение о доску. Поэтому доска тормозится быстрее тела, и тело проскальзывает вперёд по ней. Доска остановится раньше и останется неподвижной — трение тела о доску слабее предельного трения покоя доски о пол, — а тело ещё проедет по неподвижной доске до остановки. Перемещение тела относительно доски равно разности путей тела и доски относительно пола: оба начали с одного места.

Обозначения. m — масса тела и доски, ось x — вправо, вдоль скоростей. N_1 — реакция пола на доску, N_2 — реакция доски на тело; $F_{\text{тр1}}$ — трение между полом и доской, $F_{\text{тр2}}$ — между телом и доской; a_1, a_2 — модули замедлений доски и тела; t_1, t_2 — моменты остановки доски и тела; S_1, S_2 — их пути до остановки.

1. Вертикальные силы. Тело в вертикальном направлении неподвижно: $N_2 = mg$. Доска давит на пол весом своим и тела: для доски $N_1 = mg + N_2 = 2mg$ (рисунок). Именно $2mg$, а не mg: пол держит обоих.



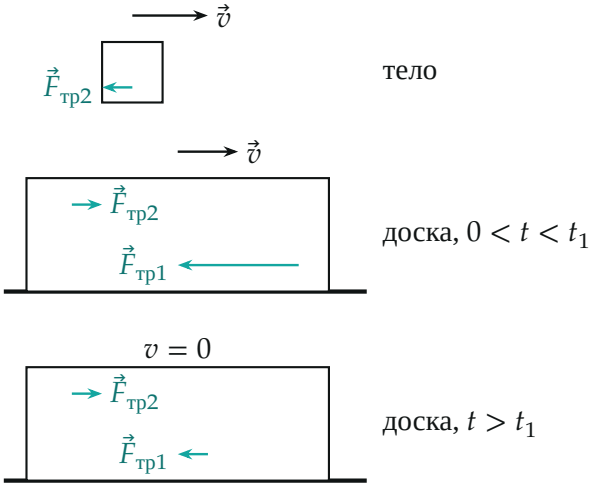
Вертикальные силы: на тело ($m\vec{g}$, $\vec{N}_2$) и на доску ($m\vec{g}$, давление тела $\vec{N}_2'$, реакция пола $\vec{N}_1$); $N_1 = 2mg$

2. Есть ли проскальзывание. Допустим, тело едет вместе с доской. Тогда у системы одно замедление, которое создаёт трение пола $2\mu N_1 = 4\mu mg$ на массу $2m$: $a = 4\mu mg/(2m) = 2\mu g$. Но тело замедляется только трением доски, которое не превосходит $\mu N_2 = \mu mg$, то есть $a_2 \leq \mu g < 2\mu g$. Противоречие: вместе они ехать не могут, тело скользит вперёд относительно доски. Трение скольжения направлено против относительной скорости и равно $F_{\text{тр}2} = \mu N_2 = \mu mg$: на тело — назад, на доску (третий закон Ньютона) — вперёд.

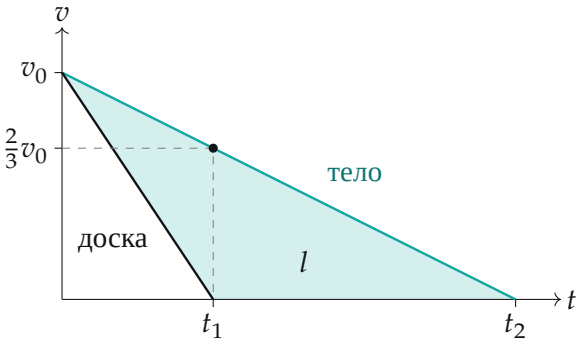
3. Замедления. Второй закон Ньютона в проекции на x. Тело: $-ma_2 = -\mu mg \Rightarrow a_2 = \mu g$. Доска, пока она движется: пол тормозит её силой $F_{\text{тр}1} = 2\mu N_1 = 4\mu mg$, тело разгоняет её силой μmg:

$$-ma_1 = -4\mu mg + \mu mg \quad \Longrightarrow \quad a_1 = 3\mu g.$$

4. Остановка доски и тела. Оба замедления постоянны, поэтому скорости убывают линейно: $v = v_0 - at$. Доска останавливается раньше: $t_1 = v_0/(3\mu g)$, тело — позже: $t_2 = v_0/(\mu g)$. Почему доска после t_1 остаётся на месте: тело продолжает толкать её вперёд силой μmg, а трение покоя пола может достигать $2\mu N_1 = 4\mu mg$, больше; значит, трение пола подстроится под μmg (рисунок), и доска неподвижна. Тело же скользит дальше с тем же замедлением μg.



Горизонтальные силы при $\mu = 0{,}4$ (длины стрелок в масштабе): пока доска скользит, пол тормозит её силой $4\mu mg$; после остановки трение пола уравновешивает μmg

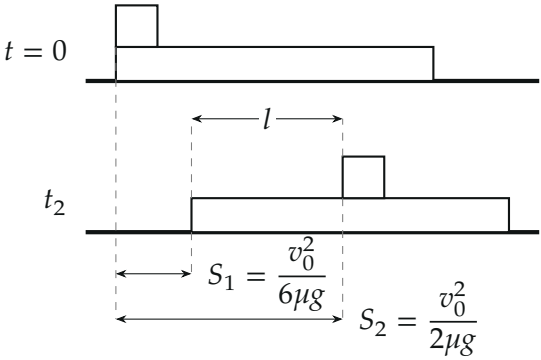


Скорости тела и доски: площадь между графиками (закрашена) равна перемещению тела относительно доски l; в момент t_1 скорость тела $\frac{2}{3}v_0$

5. Пути и перемещение. Путь при равнозамедленном движении до остановки $S = v_0^2/(2a)$:

$$S_1 = \frac{v_0^2}{6\mu g}, \qquad S_2 = \frac{v_0^2}{2\mu g}, \qquad l = S_2 - S_1 = \frac{v_0^2}{3\mu g}.$$

Это и есть площадь закрашенного треугольника на графике: основание $t_2 - t_1 = 2v_0/(3\mu g)$, высота v_0, площадь $\frac{1}{2} \cdot \frac{2v_0}{3\mu g} \cdot v_0 = \frac{v_0^2}{3\mu g}$.



Положения при $t = 0$ и t_2 (в масштабе: S_1 и S_2 относятся как $1 : 3$); тело сместилось по доске на l

Обратите внимание. Доска не едет дальше после t_1: без проверки, что трение покоя пола ($\leq 4\mu mg$) превосходит силу μmg от тела, этот шаг был бы догадкой. И $N_1 = 2mg$ — в силе трения пола стоит вес обоих тел.

Проверка. Размерность: $v_0^2/(\mu g)$ — (м/с)^2 / (м/с^2) = м. Второй способ — энергия. Вся начальная кинетическая энергия $2 \cdot \frac{1}{2}mv_0^2 = mv_0^2$ перешла в тепло: пол отнимает $4\mu mg \cdot S_1$ (пока доска движется), а трение тела о доску — $\mu mg \cdot l$ (произведение силы на проскальзывание):

$$mv_0^2 = 4\mu mg \cdot \frac{v_0^2}{6\mu g} + \mu mg \cdot l \quad \Longrightarrow \quad l = \frac{v_0^2}{\mu g}\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{v_0^2}{3\mu g}.$$

Совпало. Предел: при $\mu \to \infty$ всё останавливается мгновенно и $l \to 0$; при $\mu \to 0$ перемещение растёт — тело долго едет по доске.

Смысл: доска теряет скорость втрое быстрее тела; оба проходят до остановки разный путь, и разница этих путей — сколько тело проскользнуло по доске.

Ответ. $l = \dfrac{v_0^2}{3\mu g}$.