Вольтметры и резистор

Задача 1. [Росатом 2022/23, отборочный этап, 11 класс, очный тур 2, задача 1] «Вольтметры и резистор».

Резистор и два вольтметра соединили так, как показано на рисунке, и подключили к этой цепи источник постоянного напряжения. Известно, что вольтметр V_1 показал при этом напряжение U, а вольтметр V_2 — напряжение $\dfrac{3U}{2}$. Когда из цепи убрали вольтметр V_2 (сохранив резистор и вольтметр V_1 последовательно подключенными к источнику), вольтметр V_1 показал напряжение $\dfrac{3U}{2}$. Какое напряжение покажет вольтметр V_2, если из цепи убрали вольтметр V_1, сохранив последовательно подключенными к источнику тот же резистор и вольтметр V_2?

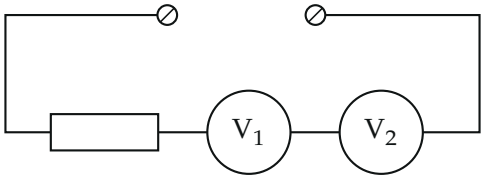
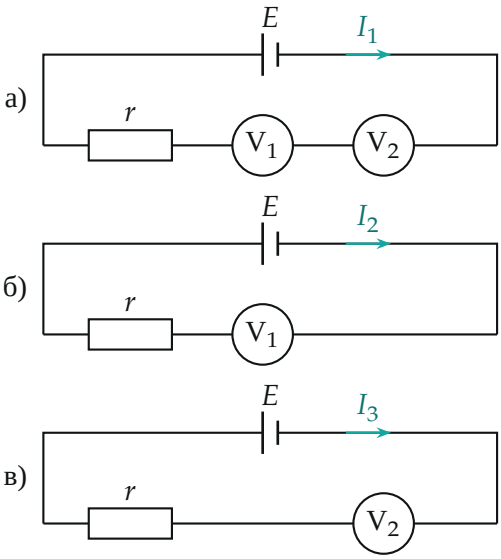


Рисунок условия: резистор и два вольтметра соединены последовательно; источник подключают к двум зажимам вверху

▲ **Решение. Что происходит.** У реального вольтметра конечное сопротивление, поэтому в цепи он — просто резистор, показывающий напряжение на себе: $U_\text{V} = IR_\text{V}$. Резистор и два вольтметра соединены последовательно, ток у них один. Опытов три, источник во всех один и тот же (его напряжение E не меняется). Первый опыт даёт отношение сопротивлений вольтметров, второй — отношение сопротивления резистора к сопротивлению вольтметра, а третий — уже искомое показание: достаточно сравнить токи.

Обозначения. E — напряжение источника (у организаторов оно обозначено так же, как показание V_1, — мы развели эти величины), r — сопротивление резистора, R_1 и R_2 — сопротивления вольтметров, I_1, I_2, I_3 — токи в трёх опытах.



Три опыта: а) резистор и два вольтметра, б) убран V_2, в) убран V_1; ток в каждой схеме общий

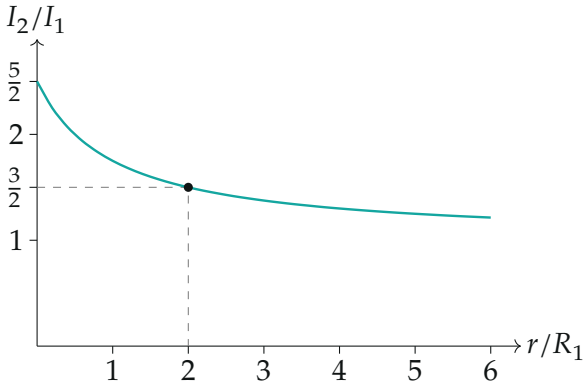
1. Первый опыт: сопротивления вольтметров. Закон Ома для участка цепи с вольтметром: показание равно току, умноженному на сопротивление. Ток общий, поэтому

$$U = I_1 R_1, \qquad \frac{3U}{2} = I_1 R_2 \quad \Longrightarrow \quad R_2 = \frac{3}{2} R_1.$$

Закон Ома для всей цепи: $E = I_1(r + R_1 + R_2) = I_1(r + \frac{5}{2}R_1)$.

2. Второй опыт: сопротивление резистора. Теперь V_1 показывает $3U/2 = I_2 R_1$, а раньше показывал $U = I_1 R_1$: ток вырос в полтора раза, $I_2 = \frac{3}{2} I_1$. Закон Ома для всей цепи, источник тот же: $E = I_2(r + R_1)$. Приравняем два выражения для E и сократим I_1:

$$I_1\left(r + \tfrac{5}{2}R_1\right) = \tfrac{3}{2} I_1 (r + R_1) \implies r + \tfrac{5}{2}R_1 = \tfrac{3}{2}r + \tfrac{3}{2}R_1 \implies r = 2R_1.$$



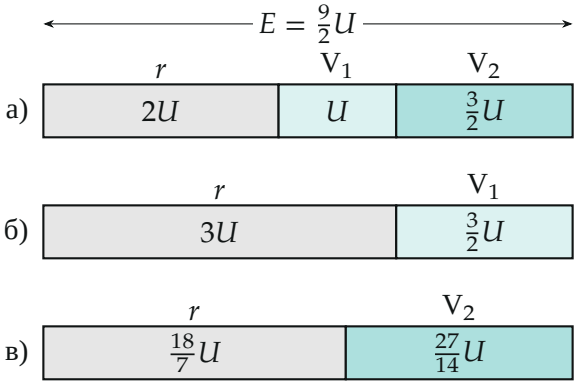
Отношение токов $I_2/I_1 = (r/R_1 + 5/2)/(r/R_1 + 1)$ как функция неизвестного r/R_1: значение $3/2$ достигается при $r/R_1 = 2$

3. Третий опыт: показание V_2. Убран V_1, остались резистор и V_2: $I_3 = \dfrac{E}{r + R_2}$. Сравним с первым опытом, где $I_1 = \dfrac{E}{r + R_1 + R_2}$; подставим $r = 2R_1$ и $R_2 = \frac{3}{2}R_1$:

$$\frac{I_3}{I_1} = \frac{r + R_1 + R_2}{r + R_2} = \frac{2R_1 + R_1 + \frac{3}{2}R_1}{2R_1 + \frac{3}{2}R_1} = \frac{9/2}{7/2} = \frac{9}{7}.$$

Показание V_2 в третьем опыте $U_2 = I_3 R_2$, в первом оно было $\frac{3}{2}U = I_1 R_2$; сопротивление R_2 то же, поэтому

$$U_2 = \frac{I_3}{I_1} \cdot \frac{3}{2}U = \frac{9}{7} \cdot \frac{3}{2}U = \frac{27}{14}\,U.$$



Напряжение источника E делится на участки пропорционально сопротивлениям (ширина — напряжение, отрезки в масштабе); $E = \frac{9}{2}U$ во всех трёх опытах

Обратите внимание. Нельзя считать вольтметр идеальным (бесконечное сопротивление): тогда V_2 ничего бы не менял и показание V_1 не выросло бы при его удалении. Именно изменение показания V_1 говорит, что сопротивления вольтметров сравнимы с сопротивлением резистора. И источник во всех опытах один: только поэтому E можно приравнять.

Проверка. Второй способ — через напряжение источника. Из первого опыта $E = I_1 \cdot \frac{9}{2}R_1 = \frac{9}{2}U$. Во втором опыте напряжение делится между $r = 2R_1$ и R_1 в отношении $2:1$, и V_1 показывает треть E: $\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{2}U = \frac{3}{2}U$ — как в условии. В третьем опыте напряжение делится между $r = 2R_1$ и $R_2 = \frac{3}{2}R_1$, то есть V_2 получает долю $\frac{3/2}{2+3/2} = \frac{3}{7}$:

$$U_2 = \frac{3}{7}E = \frac{3}{7}\cdot\frac{9}{2}U = \frac{27}{14}U.$$

Совпало, и условие второго опыта выполнено само собой. Размерность: отношение токов безразмерно, ответ — напряжение; $\frac{27}{14}U < E = \frac{9}{2}U$, как и должно быть: часть напряжения падает на резисторе.

Смысл: вольтметр показывает свою долю напряжения источника, а доля зависит от того, кто ещё стоит в цепи; без соседнего вольтметра доля V_2 выросла с $\frac{1}{3}E$ до $\frac{3}{7}E$.

Ответ. $U_2 = \dfrac{27}{14}U \approx 1{,}93\,U.$