Пробирка с точечным телом

Задача 2. [Росатом 2022/23, отборочный этап, 11 класс, очный тур 2, задача 2] «Пробирка с точечным телом».

На дно узкой пробирки длиной l и площадью поперечного сечения S положили массивное точечное тело и опустили пробирку в неглубокий сосуд с водой. В результате дно пробирки легло на дно сосуда, ее половина оказалась в воде, половина — над водой (см. рисунок). Найти массу пустой пробирки. Плотность воды ρ.

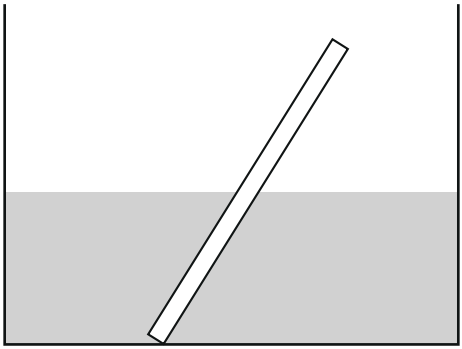
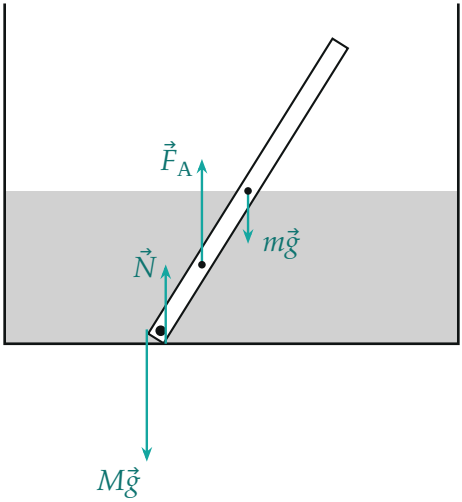


Рисунок условия: пробирка стоит наклонно, нижним краем на дне сосуда; половина её длины под водой

▲ **Решение. Что происходит.** Пробирка покоится, опираясь нижним краем на дно; наклон не нужно знать. Сил четыре: тяжесть пробирки, давление лежащего на её дне тела, реакция дна и сила Архимеда на погружённую половину. Главная идея — записать правило моментов относительно нижней точки O: сила давления тела и реакция дна приложены в самой точке O (тело лежит на дне, пробирка узкая), их моменты равны нулю, и неизвестные масса тела и реакция вообще не понадобятся. Останутся тяжесть пробирки и сила Архимеда, а силу Архимеда мы знаем через ρ, S и l.

Обозначения. m — масса пустой пробирки, M — масса тела, θ — угол между пробиркой и вертикалью, F_{A} — сила Архимеда, N — реакция дна. Пробирка однородная и узкая: её центр масс — в середине длины, на расстоянии $\frac{l}{2}$ от дна; вода свободно подходит к нижнему краю.

1. Силы на пробирку. Тяжесть $m\vec{g}$ приложена в середине пробирки. Сила Архимеда равна весу воды в объёме погружённой части; она приложена в центре этого объёма — в середине погружённой части, то есть на расстоянии $\frac{1}{4}l$ от дна, так как погружена половина длины. Тело давит на дно пробирки весом Mg, дно сосуда отвечает реакцией $\vec{N}$.

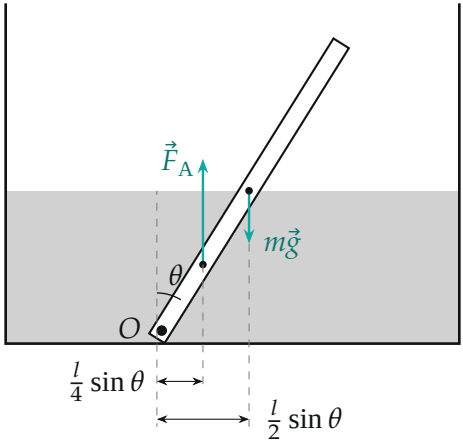


Силы на пробирку; стрелки в масштабе при $M = 2{,}5m$ (взято для наглядности): вертикальное равновесие даёт $N = (M - m)g$

2. Правило моментов относительно точки O**.** Пробирка неподвижна, поэтому сумма моментов сил относительно любой оси равна нулю; ось через нижнюю точку O перпендикулярна плоскости рисунка. Плечо силы — горизонтальное расстояние от O до вертикали, вдоль которой действует сила. Для тяжести пробирки плечо $\frac{l}{2}\sin\theta$, для силы Архимеда $\frac{l}{4}\sin\theta$; тяжесть пытается опрокинуть пробирку по часовой стрелке, сила Архимеда — против:

$$mg \cdot \frac{l}{2}\sin\theta = F_A \cdot \frac{l}{4}\sin\theta \quad \Longrightarrow \quad F_A = 2mg.$$

Угол θ сократился, поэтому равновесие возможно при любом наклоне, и его знать не нужно.



Плечи относительно нижней точки O: $\frac{l}{2}\sin\theta$ у $m\vec{g}$ и $\frac{l}{4}\sin\theta$ у $\vec{F}_A$; силы N и Mg приложены в O, их плечи равны нулю

3. Сила Архимеда через плотность воды. Объём погружённой части — цилиндр длиной $\frac{l}{2}$ и сечением S, то есть $\frac{Sl}{2}$ (пробирка узкая, поэтому наклон среза у поверхности воды объём не меняет):

$$F_A = \rho g \frac{Sl}{2}.$$

Подставим в $F_A = 2mg$: $2mg = \frac{\rho g S l}{2}$, откуда $m = \frac{\rho l S}{4}$.

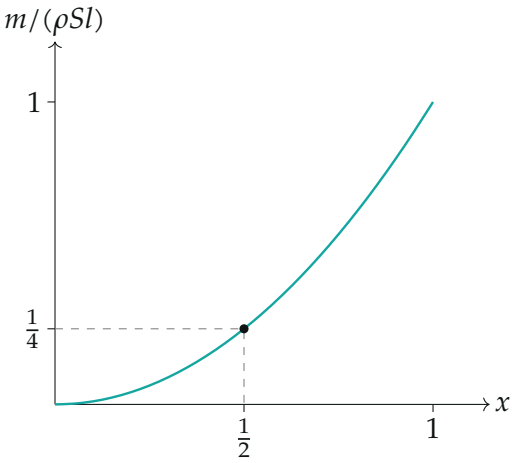
Обратите внимание. Тело M и реакция дна в ответ не вошли: у них нулевое плечо относительно O. Условие $M > m$ нужно только для того, чтобы пробирку удерживало дно: из равновесия сил по вертикали $N + F_A = mg + Mg$ получаем $N = (M - m)g > 0$ — поэтому тело названо массивным.

Проверка. Размерность: $\rho l S$ — (кг/м^3)·м·м^2 = кг. Второй способ — общий случай. Пусть погружена доля x длины. Сила Архимеда $\rho g S x l$ приложена на расстоянии $\frac{xl}{2}$ от дна, поэтому

$$mg \cdot \frac{l}{2}\sin\theta = \rho g S x l \cdot \frac{xl}{2}\sin\theta \quad \Longrightarrow \quad m = \rho S l\, x^2.$$

При $x = \frac{1}{2}$ получаем $\frac{1}{4}\rho S l$ — тот же ответ. Предел: при $x = 1$ получи-

лось бы $m = \rho Sl$ — масса воды в объёме пробирки, то есть пробирка с плотностью воды; при $x \to 0$ пробирка почти невесома.



Масса пробирки, которая погружена на долю x своей длины, в единицах ρSl: $m/(\rho Sl) = x^2$; точка $x = \frac{1}{2}$ — наша задача

Смысл: пустая пробирка вчетверо легче воды в своём объёме, а удерживает её в таком положении тяжёлое тело на дне.

Ответ. $m = \dfrac{\rho lS}{4}$.