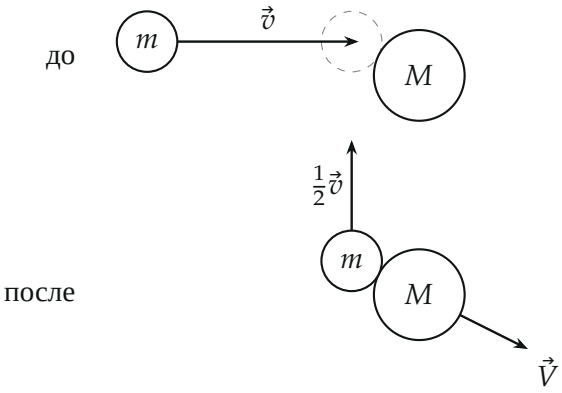
Упругий удар под прямым углом

Задача 3. [Росатом 2022/23, отборочный этап, 11 класс, очный тур 2, задача 3] «Упругий удар под прямым углом».

Тело массой m налетает на покоящееся тело с неизвестной массой и после абсолютно упругого удара движется в перпендикулярном направлении со скоростью, составляющей половину начальной. Найти массу второго тела.



Поясняющий рисунок (условие без рисунка): тела — гладкие шары, в момент удара импульс получает второе тело вдоль линии центров; $\vec{V}$ — скорость второго тела после удара

▲ **Решение.** **Что происходит.** Удар быстрый, поэтому за время удара внешними силами можно пренебречь: система из двух тел замкнута, и сохраняются и импульс (как вектор, то есть по каждой оси отдельно), и, поскольку удар абсолютно упругий, механическая энергия. Неизвестных три: масса M и две проекции скорости второго тела после удара. Уравнений тоже три: два для импульса (по двум осям) и одно для энергии.

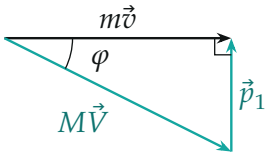
Обозначения. v — начальная скорость первого тела; ось x — вдоль $\vec{v}$, ось y — перпендикулярно, в ту сторону, куда полетит первое тело; V_x, V_y — проекции скорости второго тела после удара. После удара первое тело движется вдоль оси y со скоростью $\frac{v}{2}$.

1. Закон сохранения импульса. Запишем его для системы двух тел в проекциях на оси: до удара импульс только у первого тела и направлен по x; после удара у первого тела только проекция на y:

$$x:\ mv = MV_x, \qquad y:\ 0 = m\frac{v}{2} + MV_y.$$

Отсюда $V_x = \dfrac{mv}{M}$, $V_y = -\dfrac{mv}{2M}$: второе тело улетает по x вперёд и по y в сторону, противоположную первому телу (минус). Квадрат его скорости

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2 = \frac{m^2v^2}{M^2}\left(1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{5m^2v^2}{4M^2}.$$

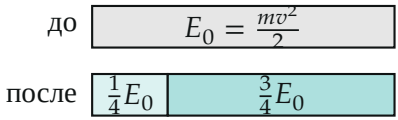


Импульсы: $m\vec{v} = \vec{p}_1 + M\vec{V}$, где $p_1 = \frac{1}{2}mv$ — импульс первого тела после удара; прямоугольный треугольник с катетами mv и p_1, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{2}$

2. Закон сохранения энергии. Удар абсолютно упругий, потерь механической энергии нет; кинетическая энергия системы до удара равна энергии после удара:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}\left(\frac{v}{2}\right)^2 + \frac{MV^2}{2} \quad\Longrightarrow\quad MV^2 = \frac{3}{4}mv^2.$$

Второму телу достаётся $\frac{3}{4}$ начальной энергии, первое сохраняет $\frac{1}{4}$.



Энергия (ширина столбика): $\frac{1}{4}$ у m и $\frac{3}{4}$ у M

3. Масса второго тела. Подставим V^2 из первого пункта в $MV^2 = \frac{3}{4}mv^2$:

$$M\cdot\frac{5m^2v^2}{4M^2}=\frac{3}{4}mv^2 \quad\Longrightarrow\quad \frac{5m}{4M}=\frac{3}{4} \quad\Longrightarrow\quad M=\frac{5}{3}m.$$

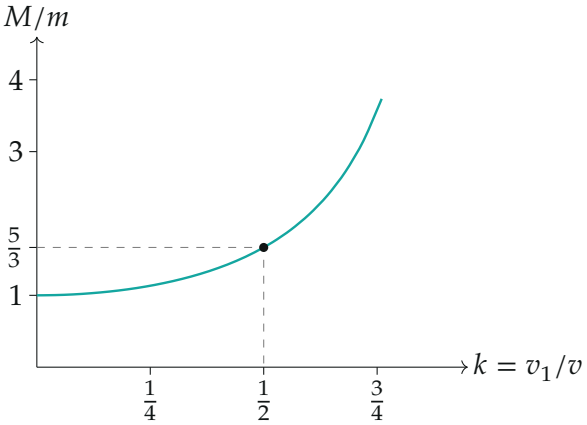
Попутно: скорость второго тела $V=\sqrt{5}\,mv/(2M)=3\sqrt{5}\,v/10\approx 0{,}67\,v$; она составляет с начальным направлением угол φ, $\operatorname{tg}\varphi=|V_y|/V_x=\frac{1}{2}$, то есть $\varphi\approx 26{,}6^\circ$.

Обратите внимание. Импульс сохраняется по каждой оси отдельно, а не только «по модулю». Направление движения второго тела не дано, поэтому берём обе его проекции неизвестными, и их, и M определяют три уравнения. Получилось $M>m$, как и должно быть: налетающее тело не может отклониться на 90°, если оно тяжелее мишени.

Проверка. Размерность: M — масса. Второй способ — через треугольник импульсов (рисунок): импульс $P=MV$ второго тела получается из $m\vec{v}=\vec{p}_1+M\vec{V}$ как гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами mv и $p_1=\frac{1}{2}mv$, $P^2=\frac{5}{4}m^2v^2$. Энергия через импульсы $E=p^2/(2\text{масса})$:

$$\frac{(mv)^2}{2m}=\frac{(\frac{1}{2}mv)^2}{2m}+\frac{\frac{5}{4}(mv)^2}{2M} \quad\Longrightarrow\quad \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{m}=\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{M} \quad\Longrightarrow\quad M=\frac{5}{3}m.$$

То же. Обобщение: если первое тело после удара летит перпендикулярно со скоростью kv, то те же два закона дают $M/m=(1+k^2)/(1-k^2)$. При $k=\frac{1}{2}$ получаем $\frac{5}{3}$; при $k\to 0$ — $M=m$ (центральный удар равных масс: налетающее тело останавливается); при $k\to 1$ масса M растёт неограниченно.



Масса второго тела в единицах m при скорости первого после удара kv (точки вычислены); $k = \frac{1}{2}$ даёт $\frac{5}{3}$

Смысл: после удара под прямым углом первое тело сохраняет четверть энергии, остальные три четверти забирает второе, более тяжёлое тело, но оно после удара движется медленнее налетавшего.

Ответ. $M = \dfrac{5}{3}\,m.$