Тело на наклонной плоскости и сила $3mg$

Задача 4. [Росатом 2022/23, отборочный этап, 11 класс, очный тур 2, задача 4] «Тело на наклонной плоскости и сила $3mg$».

На шероховатую наклонную плоскость, составляющую угол $\alpha = 45°$ с горизонтом, аккуратно кладут шероховатое тело массой m, и оно начинает двигаться с некоторым ускорением. Если к телу приложить силу $\vec{F}$ величиной $3mg$, направленную горизонтально (см. рисунок), оно будет двигаться с таким же ускорением, но направленным вверх вдоль плоскости. Найти коэффициент трения между телом и плоскостью.

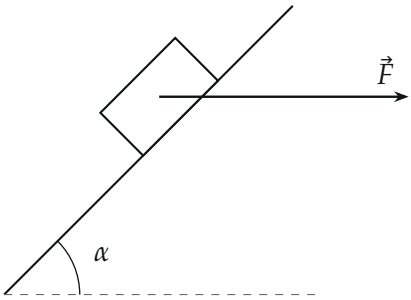


Рисунок условия: тело на плоскости с углом $\alpha = 45°$, горизонтальная сила $\vec{F}$

▲ **Решение. Что происходит.** Два опыта с одним и тем же ускорением по модулю. В первом тело, лишь положенное на плоскость, скользит вниз: вдоль плоскости тянет вниз составляющая тяжести, вверх — трение. Во втором горизонтальная сила $3mg$ тянет тело вдоль плоскости вверх и одновременно прижимает его к плоскости, так что нормальная реакция, а с ней и трение, растут; трение теперь направлено вниз, потому что тело едет вверх. Запишем второй закон Ньютона вдоль плоскости в обоих опытах, выразим ускорения через μ и приравняем их модули.

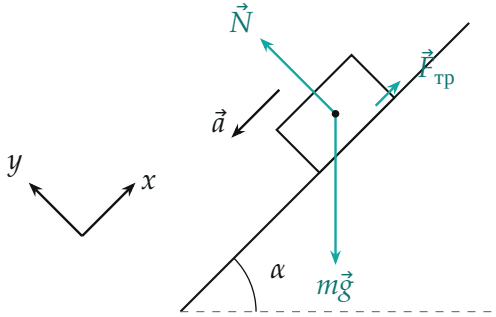
Обозначения. a — общий модуль ускорения; μ — коэффициент трения; N_1, N_2 — реакции плоскости. Ось x направим вдоль плоскости вверх, ось y — перпендикулярно плоскости от неё (на рисунках). Так как $\alpha = 45°$, $\sin\alpha = \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Тело движется, значит, трение — трение скольжения, $F_{\text{тр}} = \mu N$.

1. Первый опыт: тело скользит вниз. Силы: $m\vec{g}$, $\vec{N}_1$, трение вверх по плоскости. На оси y ускорения нет, проекция $m\vec{g}$ равна $-mg\cos\alpha$:

$$N_1 - mg\cos\alpha = 0 \;\Rightarrow\; N_1 = mg\cos\alpha.$$

На оси x ускорение направлено вниз, его проекция $-a$:

$$-ma = -mg\sin\alpha + \mu N_1 \quad\Longrightarrow\quad a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = \frac{g(1-\mu)}{\sqrt{2}}.$$



Первый опыт: тело скользит вниз, $\vec{F}_{тр}$ направлена вверх (масштаб: $mg = 2$ см при $\mu = \frac{1}{3}$)

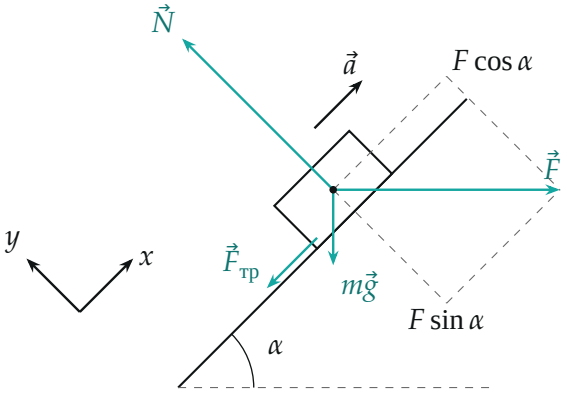
2. Второй опыт: добавлена сила $\vec{F}$. Сила $\vec{F} = 3mg$ горизонтальна, а плоскость наклонена на α, поэтому направление $\vec{F}$ составляет с направлением вверх по плоскости угол α: вдоль плоскости вверх у неё проекция $F\cos\alpha$, а перпендикулярно — проекция $-F\sin\alpha$ (в плоскость). Ось y (ускорения нет):

$$N_2 - mg\cos\alpha - F\sin\alpha = 0 \;\Rightarrow\; N_2 = (mg + 3mg)\cos\alpha = \frac{4mg}{\sqrt{2}}.$$

Нормальная реакция выросла вчетверо по сравнению с первым опытом. Тело едет вверх, трение направлено вниз, ось x (ускорение вверх, про-

екция $+a$):

$$ma = F\cos\alpha - mg\sin\alpha - \mu N_2 = \frac{2mg}{\sqrt{2}} - \mu\,\frac{4mg}{\sqrt{2}} \implies a = \frac{2g(1-2\mu)}{\sqrt{2}}.$$



Второй опыт: тело скользит вверх, $\vec{F}_{тр}$ направлена вниз; пунктир — проекции $\vec{F}$ на оси (масштаб: $mg = 1$ см при $\mu = \frac{1}{3}$)

3. Равные ускорения. По условию модули ускорений совпадают (направления противоположны, что мы уже учли знаками):

$$\frac{g(1-\mu)}{\sqrt{2}} = \frac{2g(1-2\mu)}{\sqrt{2}} \quad\Longrightarrow\quad 1-\mu = 2-4\mu \quad\Longrightarrow\quad \mu = \frac{1}{3}.$$

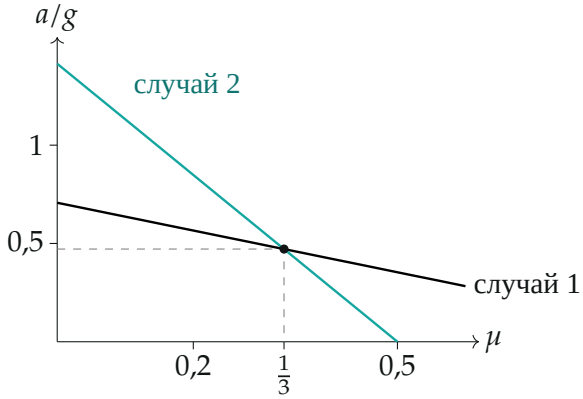
Обратите внимание. Нормальная реакция во втором опыте — не $mg\cos\alpha$: горизонтальная сила прижимает тело к плоскости (её проекция на нормаль $F\sin\alpha$), и трение больше. Это главное отличие опытов: без него получилось бы $1-\mu = 2-\mu$ — решения нет вовсе.

Проверка. Подставим $\mu = \frac{1}{3}$ и посчитаем оба ускорения заново. Первый опыт: $a = g(1-\frac{1}{3})/\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}g \approx 0{,}47\,g$, вниз; допущение «тело скользит вниз» верно, так как $\mu = \frac{1}{3} < \operatorname{tg}\alpha = 1$. Второй опыт: $N_2 = 4mg/\sqrt{2}$, $F_{\text{тр}} = \frac{1}{3}N_2 = \frac{4}{3}\,mg/\sqrt{2}$, и равнодействующая вдоль

плоскости вверх

$$\frac{(3-1)mg}{\sqrt{2}} - \frac{4mg}{3\sqrt{2}} = \frac{2mg}{3\sqrt{2}} \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{\sqrt{2}}{3}\,g$$

— то же значение, направление вверх, как требует условие. Размерность: μ безразмерен.



Модули ускорений в первом и втором опытах в зависимости от μ (точки вычислены): кривые пересекаются при $\mu = \frac{1}{3}$ в значении $\frac{\sqrt{2}}{3}\,g$

Смысл: при малом трении сила $3mg$ разгоняет тело вверх сильнее, чем оно разгоняется вниз; с ростом μ второй опыт теряет ускорение быстрее (трение растёт вчетверо), и при $\mu = \frac{1}{3}$ ускорения сравниваются.

Ответ. $\mu = \dfrac{1}{3}$.