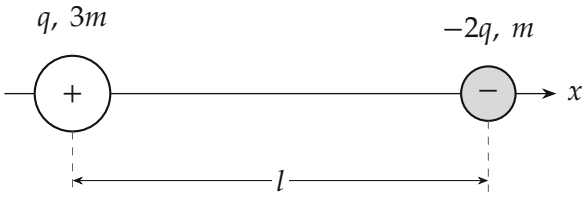
Два разноимённых заряда

Задача 5. [Росатом 2022/23, отборочный этап, 11 класс, задача 5] Два точечных заряда q и $-2q$ с массами $3m$ и m соответственно удерживают в вакууме на расстоянии l друг от друга. В некоторый момент времени заряды одновременно отпускают, и благодаря кулоновскому притяжению они начинают двигаться навстречу друг другу. Найти скорости зарядов в тот момент времени, когда расстояние между ними уменьшится вдвое.

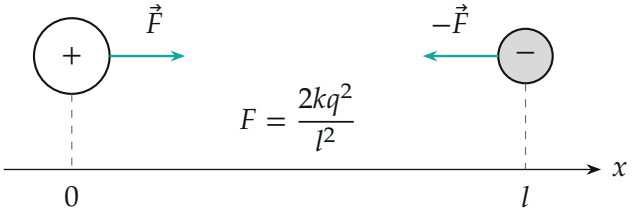


Поясняющий рисунок к условию: ось x направлена от заряда q к заряду $-2q$.

▲ **Решение. Что происходит.** Заряды разного знака притягиваются и разгоняются навстречу друг другу. Кроме их взаимного притяжения, на систему из двух зарядов ничего не действует, поэтому два закона сохранения — импульса и энергии — дают два уравнения на две неизвестные скорости. Энергия электрического взаимодействия уходит в кинетическую; чем тяжелее заряд, тем меньше его скорость.

Обозначения. Ось x направим от заряда q к заряду $-2q$. v_1 — модуль скорости заряда q (масса $3m$), он движется по оси; v_2 — модуль скорости заряда $-2q$ (масса m), он движется против оси, его проекция равна $-v_2$. Состояние 0 — расстояние l, заряды покоятся; состояние 1 — расстояние $l/2$. Тяжестью пренебрегаем: в условии нет ни g, ни опоры.

1. Закон сохранения импульса. Систему «заряд q + заряд $-2q$» считаем замкнутой: внешних сил нет, а силы взаимодействия — внутренние, равные по модулю и противоположные (третий закон Ньютона). Значит, импульс системы не меняется. В состоянии 0 заряды покоились, поэтому в состоянии 1 суммарный импульс по-прежнему нулевой.



Начальный момент: кулоновские силы равны по модулю и направлены навстречу; других сил нет.

В проекции на ось x:

$$0 = 3m\,v_1 + m\,(-v_2) \quad \Rightarrow \quad v_2 = 3v_1.$$

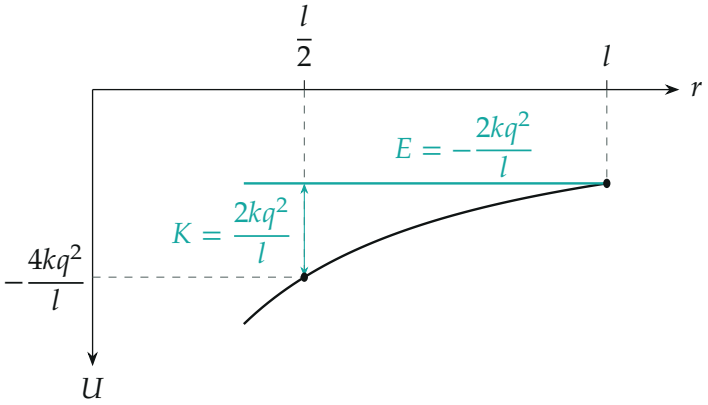
Заряды разлетаются по импульсу: у лёгкого заряда скорость в 3 раза больше, и это верно в любой момент разгона, не только при $r = l/2$.

2. Закон сохранения энергии. Кулоновская сила потенциальна, трения нет, поэтому полная энергия системы — кинетическая плюс энергия взаимодействия $U = kq_1q_2/r$ — сохраняется. Здесь $q_1q_2 = q \cdot (-2q) = -2q^2$, так что $U(r) = -2kq^2/r$. Запишем закон между состоянием 0 и состоянием 1:

$$\underbrace{0 - \frac{2kq^2}{l}}_{\text{состояние 0}} = \underbrace{\frac{3mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} - \frac{2kq^2}{l/2}}_{\text{состояние 1}}.$$

Энергия взаимодействия стала отрицательнее: $U(l/2) = -4kq^2/l$. Электрическая энергия ушла в кинетическую:

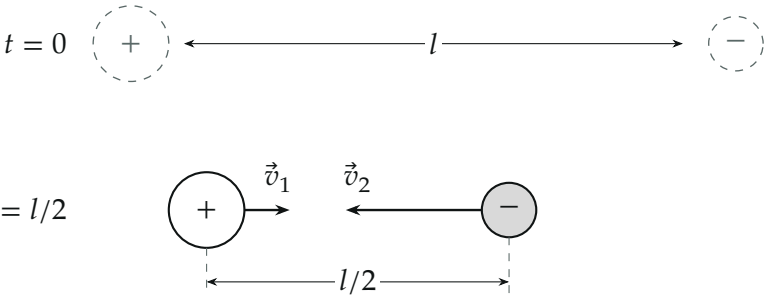
$$\frac{3mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} = \frac{4kq^2}{l} - \frac{2kq^2}{l} = \frac{2kq^2}{l}.$$



Энергия взаимодействия $U(r) = -2kq^2/r$ (график построен по точкам) и полная энергия E. Кинетическая энергия в точке r равна расстоянию от кривой до уровня E.

3. Скорости. Подставим $v_2 = 3v_1$ в уравнение энергии. Неизвестная одна:

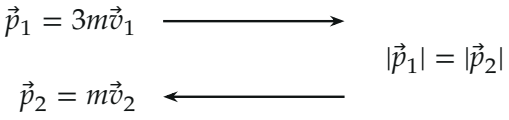
$$\frac{3mv_1^2}{2} + \frac{m \cdot 9v_1^2}{2} = 6mv_1^2 = \frac{2kq^2}{l} \quad \Rightarrow \quad v_1^2 = \frac{kq^2}{3ml}, \qquad v_2^2 = 9v_1^2 = \frac{3kq^2}{ml}.$$

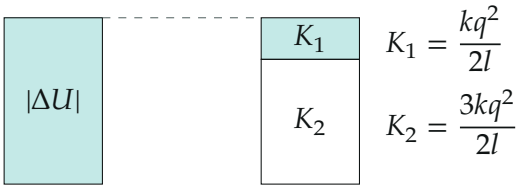


Начало и конец. Длины стрелок скоростей относятся как $v_1 : v_2 = 1 : 3$.

Проверка. Размерность: kq^2/l — энергия, $kq^2/(ml)$ — квадрат скорости, ответы имеют размерность скорости. Второй способ — через относительное движение: сумма кинетических энергий равна $\mu v_{\text{отн}}^2/2$ с приведённой массой $\mu = 3m \cdot m/(3m + m) = 3m/4$, а скорость сближения

$v_{\text{отн}} = v_1 + v_2 = 4v_1$; получаем $\frac{3m}{8} \cdot 16v_1^2 = 6mv_1^2$, как и выше. Знак: заряды разноимённые, $U < 0$ и при сближении только уменьшается — система действительно набирает кинетическую энергию.





Импульсы зарядов равны по модулю и противоположны по направлению; убыль потенциальной энергии $|\Delta U| = 2kq^2/l$ делится между зарядами как $K_1 : K_2 = 1 : 3$, то есть обратно массам.

Ответ. Заряд q (масса $3m$): $v_1 = \sqrt{\dfrac{kq^2}{3ml}}$; заряд $-2q$ (масса m): $v_2 = 3v_1 = \sqrt{\dfrac{3kq^2}{ml}}$.