# Цикл с одноатомным газом

**Задача 6.** [Росатом 2022/23, отборочный этап, 11 класс, задача 6] С идеальным одноатомным газом проводят циклический процесс. График зависимости объёма газа от его абсолютной температуры в этом процессе представлен на рисунке. Известны абсолютные температуры газа в состояниях 1 и 3 — $T_1 = T$ и $T_3 = 4T$. Известно также, что температуры газа в состояниях 2 и 4 одинаковы. Найти термодинамический КПД цикла.

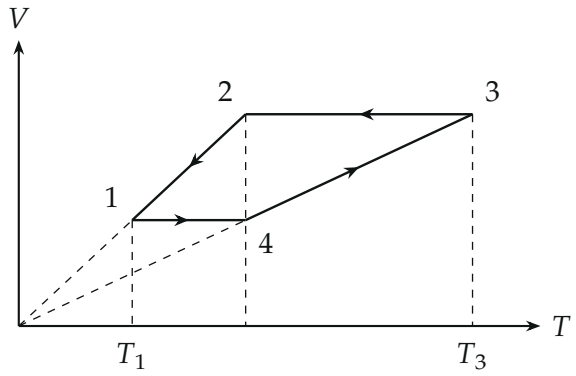


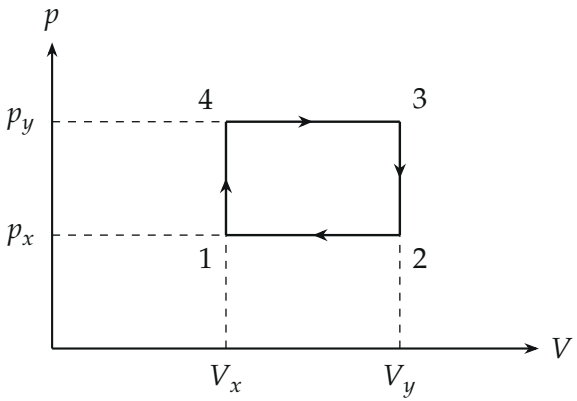

*График $V(T)$ цикла $1 \to 4 \to 3 \to 2 \to 1$ (рисунок условия).*

▲ **Решение. Что происходит.** Цикл задан в непривычных координатах $V$–$T$, поэтому первое дело — перевести его в $p$–$V$. Прямая, проходящая через начало координат на плоскости $V$–$T$, — изобара: при $p = \text{const}$ объём $V = \nu RT/p$ пропорционален температуре. Горизонтальные отрезки — изохоры. КПД равен работе за цикл, делённой на теплоту, которую газ получает на тех участках, где он её действительно получает. Условие $T_2 = T_4$ вместе с $T_3/T_1 = 4$ определяет форму цикла.

**Обозначения.** $p_x$, $V_x$ — давление и объём газа в состоянии 1; $p_y$, $V_y$ — давление и объём в состоянии 3; $\nu$ — число молей. Тогда состояния: $1\,(p_x, V_x)$, $4\,(p_y, V_x)$, $3\,(p_y, V_y)$, $2\,(p_x, V_y)$.

**1. Какие это процессы.** Участки $1 \to 4$ и $3 \to 2$ горизонтальны: $V = \text{const}$ — изохоры. Участки $4 \to 3$ и $2 \to 1$ лежат на прямых, продолжения которых проходят через начало координат: это изобары. У изобары $V = \nu RT/p$ угол наклона тем меньше, чем больше давление, а прямая 4–3

положе прямой 2–1. Значит, на $4 \to 3$ давление $p_y$ больше, чем на $2 \to 1$, где оно $p_x$. В координатах $p$–$V$ цикл — прямоугольник.




*Тот же цикл в координатах $p$–$V$: $1 \to 4$ — изохорный нагрев, $4 \to 3$ — изобарное расширение, $3 \to 2$ — изохорное охлаждение, $2 \to 1$ — изобарное сжатие.*

**2. Температуры состояний.** Уравнение Менделеева — Клапейрона для состояния 1: $\nu RT = p_x V_x$. Введём безразмерные отношения давлений и объёмов: $p_y = k\,p_x$, $V_y = n\,V_x$. Тогда

$$T_1 = T, \qquad T_4 = \frac{p_y V_x}{\nu R} = kT,$$
$$T_2 = \frac{p_x V_y}{\nu R} = nT, \qquad T_3 = \frac{p_y V_y}{\nu R} = knT.$$

По условию $T_2 = T_4$, значит $n = k$. Тогда $T_3 = k^2 T = 4T$, откуда $k = 2$:

$$p_y = 2p_x, \qquad V_y = 2V_x, \qquad T_2 = T_4 = 2T.$$

Обратите внимание: из двух условий ($T_2 = T_4$ и $T_3 = 4T_1$) неизвестны два отношения, $k$ и $n$ — уравнений ровно столько, сколько нужно.

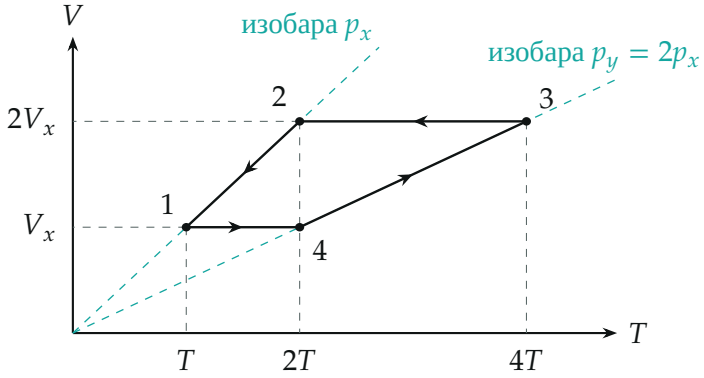



*График $V(T)$ с найденными значениями: две изобары проходят через начало координат, $T_2 = T_4 = 2T$ лежат на одной вертикали.*

**3. Работа за цикл.** Работа газа за цикл равна площади цикла в координатах $p$–$V$ (цикл обходится по часовой стрелке — работа положительна):

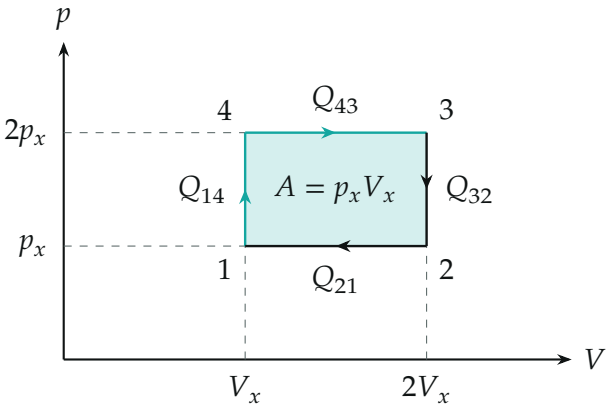
$$A = (p_y - p_x)(V_y - V_x) = (2p_x - p_x)(2V_x - V_x) = p_x V_x.$$

**4. Где газ получает теплоту.** Для каждого участка запишем первое начало термодинамики $Q = \Delta U + A_{\text{газа}}$; внутренняя энергия одноатомного газа $U = \frac{3}{2}\nu RT$, и $\nu RT_i = p_i V_i$.

- $1 \to 4$, изохора: $A = 0$, $T$ растёт от $T$ до $2T$: $\Delta U > 0$, значит $Q_{14} > 0$ — газ получает теплоту: $Q_{14} = \frac{3}{2}\nu R(T_4 - T_1) = \frac{3}{2}p_x V_x$.
- $4 \to 3$, изобара $p_y$: газ расширяется, $A_{43} = p_y(V_y - V_x) = 2p_x V_x$, температура растёт от $2T$ до $4T$: $\Delta U = \frac{3}{2}\nu R \cdot 2T = 3p_x V_x$. Газ получает теплоту: $Q_{43} = 3p_x V_x + 2p_x V_x = 5p_x V_x$.
- $3 \to 2$, изохора: $A = 0$, температура падает ($4T \to 2T$), $\Delta U < 0$, значит $Q_{32} < 0$: газ отдаёт теплоту, $Q_{32} = \frac{3}{2}\nu R\,(2T - 4T) = -3p_x V_x$.
- $2 \to 1$, изобара $p_x$: газ сжимается ($A < 0$), температура падает ($2T \to T$), $\Delta U < 0$, значит $Q_{21} < 0$: газ отдаёт, $Q_{21} = \frac{5}{2}\nu R\,(T - 2T) = -\frac{5}{2}p_x V_x$.

Получает газ только на участке $1 \to 4 \to 3$:

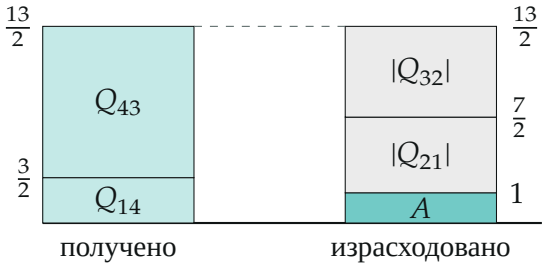
$$Q_{\text{получ}} = Q_{14} + Q_{43} = \tfrac{3}{2} p_x V_x + 5 p_x V_x = \tfrac{13}{2} p_x V_x.$$




*Цикл в координатах $p$–$V$: заштрихована работа $A$, бирюзовым выделены участки, где газ получает теплоту.*

**5. КПД.** Термодинамический КПД — работа за цикл, делённая на полученную теплоту:

$$\eta = \frac{A}{Q_{\text{получ}}} = \frac{p_x V_x}{\frac{13}{2} p_x V_x} = \frac{2}{13} \approx 0{,}15.$$




*Баланс энергии за цикл в единицах $p_x V_x$: из полученных $13/2$ в работу уходит $1$, остальные $11/2 = 5/2 + 3$ отдаются на участках $3 \to 2 \to 1$.*

**Проверка.** Размерность: $p_x V_x$ — энергия, в КПД она сокращается — ответ безразмерный. Второй способ — через отданную теплоту:

$$|Q_{\text{отд}}| = |Q_{32}| + |Q_{21}| = 3p_xV_x + \tfrac{5}{2}p_xV_x = \tfrac{11}{2}\,p_xV_x,$$
$$Q_{\text{получ}} - |Q_{\text{отд}}| = \tfrac{13}{2}p_xV_x - \tfrac{11}{2}p_xV_x = p_xV_x = A,$$

то есть баланс теплоты совпадает с работой по площади. Предел: КПД не может превышать КПД цикла Карно между крайними температурами, $1 - T_1/T_3 = 0{,}75$; наши 0,15 заметно меньше. Смысл: газ нагревается до $4T$, но из $5p_xV_x$ теплоты, взятых на изобаре, только $2p_xV_x$ идут в работу расширения, а работа за весь цикл — лишь площадь узкого прямоугольника.

**Ответ.** $\eta = \dfrac{2}{13} \approx 0{,}15.$