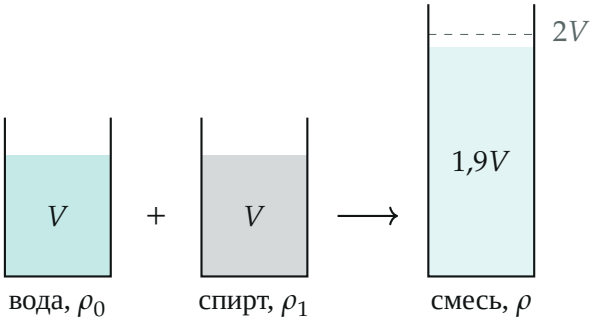
Смесь воды и спирта

Задача 1. [Росатом 2022/23, отборочный этап, 7 класс, Москва, задача 1] Известно, что при смешивании одинаковых объемов воды и спирта объем смеси уменьшается на 5% по сравнению с суммой объемов компонент. Найти плотность смеси одинаковых объемов спирта и воды, если плотность воды $\rho_0 = 1$ г/см^3, плотность спирта $\rho_1 = 0{,}8$ г/см^3.



Поясняющий рисунок: смешали по объёму V воды и спирта; смесь занимает не $2V$ (пунктир), а на 5% меньше

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на среднюю плотность. Плотность смеси — её масса, делённая на её объём. При смешивании масса сохраняется: сколько граммов воды и спирта налили, столько граммов смеси и получится. А объём не сохраняется: молекулы спирта и воды «упаковываются» плотнее, и смесь занимает меньше места, чем вода и спирт порознь. Поэтому массу считаем как сумму, а объём — с поправкой на 5%.

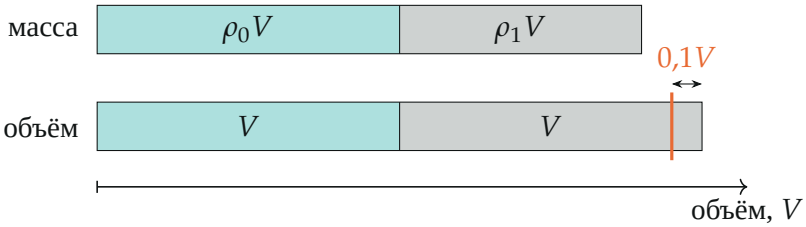
Обозначения. V — объём воды (и такой же объём спирта); m_0, m_1 — массы воды и спирта; M и $V_{\text{см}}$ — масса и объём смеси; ρ — плотность смеси.

1. Масса смеси. Масса каждой жидкости — плотность, умноженная на объём:

$$m_0 = \rho_0 V, \qquad m_1 = \rho_1 V.$$

Масса при смешивании сохраняется (вещество никуда не девается), поэтому

$$M = m_0 + m_1 = (\rho_0 + \rho_1)V = 1{,}8\ \text{г/см}^3 \cdot V.$$



Массы складываются полностью, а из суммы объёмов $2V$ при смешивании «пропадает» 5%, то есть $0{,}1V$ (до морковной черты)

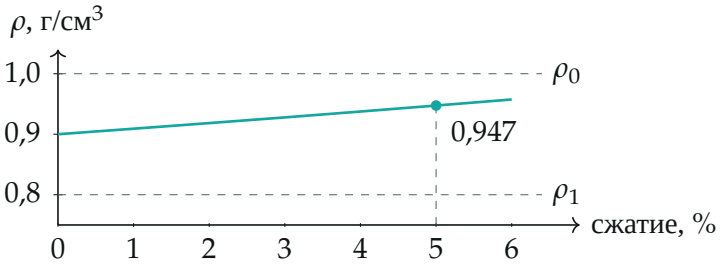
2. Объём смеси. Сумма объёмов компонент — $2V$. По условию объём смеси на 5% меньше этой суммы:

$$V_{\text{см}} = 2V - 0{,}05 \cdot 2V = 0{,}95 \cdot 2V = 1{,}9V.$$

3. Плотность смеси. По определению плотности

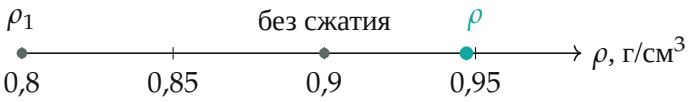
$$\rho = \frac{M}{V_{\text{см}}} = \frac{(\rho_0 + \rho_1)V}{0{,}95 \cdot 2V} = \frac{\rho_0 + \rho_1}{1{,}9} = \frac{1{,}8}{1{,}9}\ \text{г/см}^3 \approx 0{,}947\ \text{г/см}^3.$$

Объём V сократился: ответ не зависит от того, сколько жидкостей взяли, — важно только, что поровну.



Плотность смеси равных объёмов в зависимости от сжатия (точки посчитаны по формуле $\rho = \frac{1{,}8}{2(1-x)}$); без сжатия она равна среднему 0,9 г/см^3

Обратите внимание: «на 5%» относится к сумме объёмов $2V$, а не к объёму одной жидкости. Если вычесть 5% от V, получится $1{,}95V$ и неверная плотность 0,923 г/см^3.



Где лежит ответ: плотность смеси больше среднего 0,9 (ведь объём уменьшился), но меньше плотности воды

Проверка. Размерность: $(\rho_0+\rho_1)/1{,}9$ — плотность. Предел: без сжатия получилось бы $\rho = \frac{\rho_0+\rho_1}{2} = 0{,}9$ г/см^3 — среднее арифметическое, как и должно быть для равных объёмов; сжатие только увеличивает плотность, и 0,947 лежит между 0,9 и плотностью воды. Числами: $V = 100$ см^3 — масса $100+80 = 180$ г, объём 190 см^3, $180/190 \approx 0{,}947$ г/см^3.

Смысл: масса при смешивании сохраняется, объём — нет; поэтому смесь чуть плотнее, чем «среднее» по объёму.

Ответ. $\rho = \dfrac{\rho_0+\rho_1}{1{,}9} \approx 0{,}947$ г/см^3.