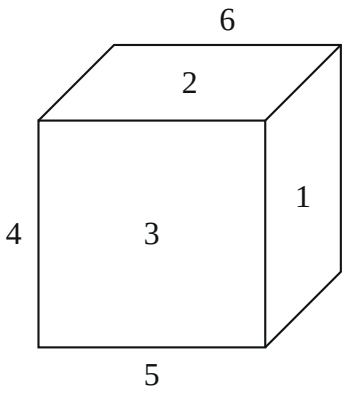
Отрезание слоёв от куба

Задача 3. [Росатом 2022/23, отборочный этап, 7 класс, Москва, задача 3] Имеется сплошной куб с ребром $a = 6$ см и массой $M = 216$ г. От куба отрезают тонкие слои толщиной $h = 1$ см, параллельные каждой грани. Последовательность граней, от которых отрезают слои — 1-2-3-4-5-6 (см. рисунок). Чему равна масса пятого отрезанного слоя? Чему равна масса оставшейся после всех отрезов части куба?



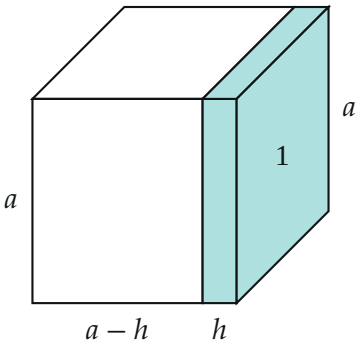
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на связь массы и объёма. Куб сплошной и однородный, поэтому масса любого его куска пропорциональна объёму этого куска: $m = \rho V$ с одной и той же плотностью ρ. Каждый отрез уменьшает на h один размер оставшегося бруска — тот, что перпендикулярен грани, от которой режут. Следующий слой поэтому меньше предыдущего: его площадь — площадь грани *уже укороченного* бруска. Нужно аккуратно проследить размеры бруска после каждого отреза.

Обозначения. Оси: x — слева направо (грани 4 и 1), y — снизу вверх (грани 5 и 2), z — спереди назад (грани 3 и 6). Размеры бруска — $x \times y \times z$ (в сантиметрах). ρ — плотность, m_k — масса k-го слоя, $m_{\text{ост}}$ — масса остатка.

1. Плотность куба. Объём куба $a^3 = 216$ см^3, поэтому

$$\rho = \frac{M}{a^3} = \frac{216\text{ г}}{216\text{ см}^3} = 1\text{ г/см}^3.$$

Масса куска в граммах численно равна его объёму в кубических сантиметрах.

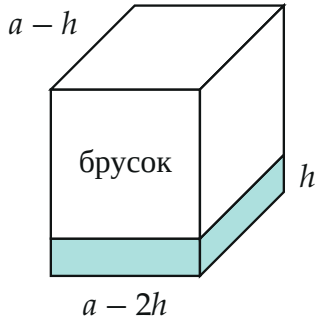


Первый отрез: от грани 1 отделяется слой $h \times a \times a$ (бирюзовый); у бруска уменьшился размер по x

2. Размеры бруска и слоёв. Слой, отрезанный от грани, — это пластинка толщиной h, площадь которой равна площади этой грани у бруска в данный момент. Пройдём по порядку (размеры в сантиметрах):

отрез	грань	слой	объём слоя, см^3	брусок после
1	правая	$1 \times 6 \times 6$	36	$5 \times 6 \times 6$
2	верхняя	$5 \times 1 \times 6$	30	$5 \times 5 \times 6$
3	передняя	$5 \times 5 \times 1$	25	$5 \times 5 \times 5$
4	левая	$1 \times 5 \times 5$	25	$4 \times 5 \times 5$
5	нижняя	$4 \times 1 \times 5$	20	$4 \times 4 \times 5$
6	задняя	$4 \times 4 \times 1$	16	$4 \times 4 \times 4$

К пятому отрезу брусок уже укорочен по x дважды (грани 1 и 4) и по z один раз (грань 3): его размеры $(a - 2h) \times (a - h) \times (a - h)$, то есть $x \times y \times z = 4 \times 5 \times 5$. Пятый слой срезают снизу, перпендикулярно y, и он имеет размеры $(a - 2h) \times h \times (a - h)$.



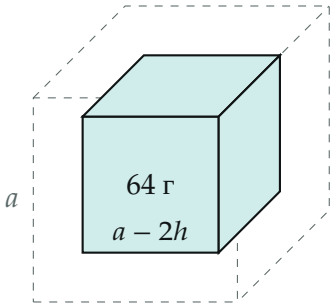
Перед пятым отрезом: от куба остался брусок $4 \times 5 \times 5$; пятый слой (бирюзовый) снизу имеет размеры $(a-2h) \times h \times (a-h)$

3. Масса пятого слоя. Масса — плотность, умноженная на объём:

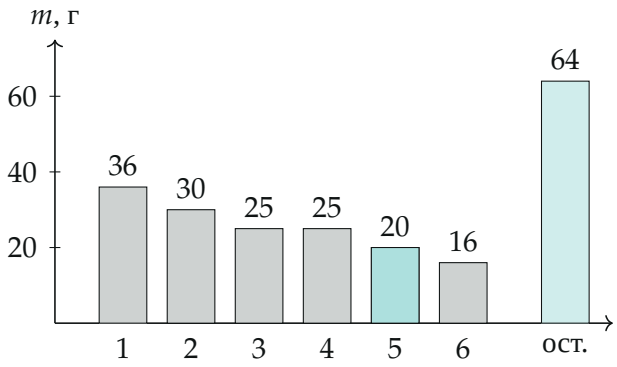
$$m_5 = \rho\,(a-2h)\,h\,(a-h) = \frac{(a-2h)(a-h)h}{a^3}\,M = \frac{4\cdot 5\cdot 1}{216}\cdot 216\text{ г} = 20\text{ г}.$$

4. Масса остатка. После шестого отреза каждый размер уменьшен ровно на $2h$ (с двух противоположных граней), и остаётся куб с ребром $a - 2h = 4$ см:

$$m_{\text{ост}} = \rho\,(a-2h)^3 = \frac{(a-2h)^3}{a^3}\,M = \left(\frac{4}{6}\right)^3\cdot 216\text{ г} = 64\text{ г}.$$



После шести отрезов: внутри исходного куба (пунктир) остался куб с ребром $a - 2h$



Массы шести слоёв по порядку отрезов и масса остатка; вместе $36+30+25+25+20+16+64=216$ *г*

Обратите внимание: пятый слой не равен $(a-h)^2h = 25$ г. Срезая снизу, режут брусок, который уже укорочен с двух сторон по ширине (отрезы 1 и 4) и с одной — по глубине (отрез 3).

Проверка. Размерность: $\frac{(a-2h)(a-h)h}{a^3}$ — безразмерная доля, умноженная на массу. Сумма всех масс — слоёв и остатка — $152+64=216$ г, то есть масса куба: ничего не потеряно и не посчитано дважды. Предел $h\to 0$: слои становятся бесконечно тонкими, $m_5\to 0$, а $m_{\text{ост}}\to M$.

Смысл: каждый следующий слой «теряет» по краям то, что уже отрезано раньше, поэтому массы слоёв убывают: $36, 30, 25, 25, 20, 16$ г.

Ответ. $m_5=\dfrac{(a-2h)(a-h)h}{a^3}M=20$ г; $m_{\text{ост}}=\dfrac{(a-2h)^3}{a^3}M=64$ г.