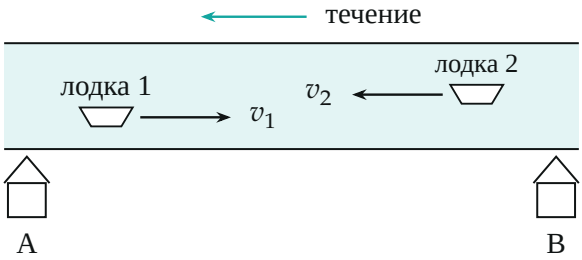
Две лодки на реке

Задача 4. [Росатом 2022/23, отборочный этап, 7 класс, Москва, задача 4] На берегу реки находятся деревни A и B (A — ниже по течению). Утром из A в B отправилась лодка 1, и одновременно из B в A — лодка 2. Лодки встретились посередине отрезка AB и продолжили движение до городов B (лодка 1) и A (лодка 2). Вечером одновременно лодки поплыли назад и встретились, когда лодка 2 проплыла третью часть пути до B. Найти скорость лодки 2, если скорость лодки 1 в стоячей воде $v_1 = 20$ км/ч.

Моторы лодок и в первом, и во втором случаях работают одинаково.



Поясняющий рисунок: утром лодки идут навстречу друг другу; река течёт от B к A

▲ **Решение. Что происходит.** Течение меняет скорость лодки относительно берега: по течению она больше скорости в стоячей воде, против течения — меньше. Утром лодка 1 идёт против течения, а лодка 2 — по течению, вечером наоборот. Каждая встреча даёт уравнение: до встречи лодки идут одно и то же время, и пройденная каждой часть пути известна (половина утром и треть вечером). Главная идея — записать время до встречи для обеих лодок и приравнять.

Обозначения. l — расстояние AB; v_1, v_2 — скорости лодок в стоячей воде (утром и вечером те же, ведь моторы работают одинаково); u — скорость течения. Скорость относительно берега: по течению $v + u$, против течения $v - u$.

1. Утро. Лодка 1 идёт из A в B, то есть против течения: её скорость относительно берега $v_1 - u$. Лодка 2 идёт из B в A, по течению: $v_2 + u$.

Они вышли одновременно и встретились посередине, значит, каждая прошла $l/2$ за одно и то же время:

$$\frac{l/2}{v_1 - u} = \frac{l/2}{v_2 + u} \quad \Rightarrow \quad v_1 - u = v_2 + u. \tag{1}$$

2. Вечер. Теперь лодка 1 идёт из B в A, по течению: $v_1 + u$, а лодка 2 из A в B, против течения: $v_2 - u$. Лодка 2 прошла от A треть пути, $l/3$, значит, лодке 1 до встречи осталось $2l/3$. Время то же:

$$\frac{l/3}{v_2 - u} = \frac{2l/3}{v_1 + u} \quad \Rightarrow \quad v_1 + u = 2(v_2 - u). \tag{2}$$

Обратите внимание: «проплыла третью часть пути до B» — это путь лодки 2 от её старта в A. Лодка 1 до встречи проплыла остальные две трети, а не треть.

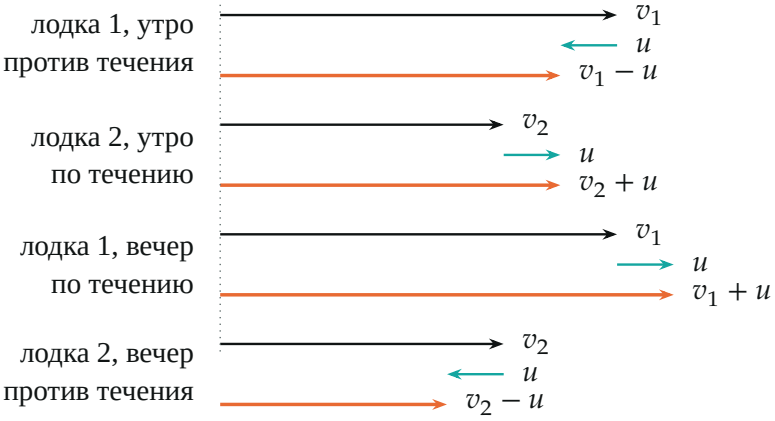
3. Решаем систему. Из (1): $v_2 = v_1 - 2u$. Подставим в (2):

$$v_1 + u = 2(v_1 - 2u - u) = 2v_1 - 6u \quad \Rightarrow \quad v_1 = 7u.$$

Отсюда

$$u = \frac{v_1}{7} = \frac{20}{7}\ \text{км/ч} \approx 2{,}9\ \text{км/ч},$$

$$v_2 = v_1 - 2u = \frac{5}{7}v_1 = \frac{100}{7}\ \text{км/ч} \approx 14{,}3\ \text{км/ч}.$$

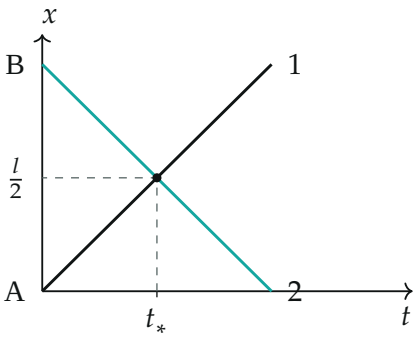


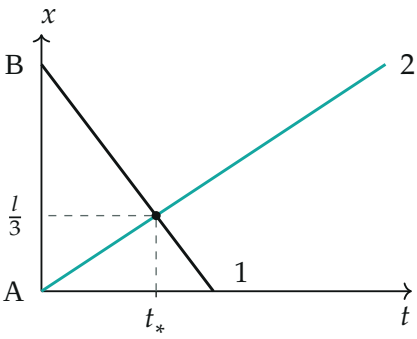
Сложение скоростей: чёрная стрелка — скорость лодки в стоячей воде, бирюзовая — течение, оранжевая — скорость относительно берега. Длины в единицах $v_1/7$: $v_1 = 7$, $v_2 = 5$, $u = 1$; утром у лодок скорости 6 и 6, вечером 8 и 4

Второй способ: скорость сближения. Утром лодки приближаются друг к другу со скоростью $(v_1 - u) + (v_2 + u) = v_1 + v_2$, вечером — $(v_1 + u) + (v_2 - u) = v_1 + v_2$: течение в сумме сокращается. Поэтому время до встречи оба раза одно и то же, $t_* = \dfrac{l}{v_1 + v_2}$, и каждая лодка проходит долю пути, равную доле её скорости в сумме. Утром лодка 1 проходит половину, вечером лодка 2 — треть:

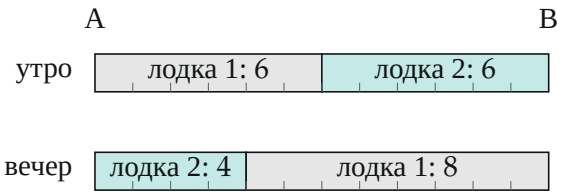
$$\frac{v_1 - u}{v_1 + v_2} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{v_2 - u}{v_1 + v_2} = \frac{1}{3}.$$

Первое равенство даёт $v_2 = v_1 - 2u$, второе — $2v_2 = v_1 + 3u$. Подставляя, получаем $v_1 = 7u$, как и раньше.





Расстояние x от A (B на высоте l): чёрная линия — лодка 1, бирюзовая — лодка 2. Встречи на высоте $l/2$ и $l/3$, но в один и тот же момент $t_* = \dfrac{l}{v_1 + v_2}$



Отрезок AB из 12 клеток: утром путь делится 6 : 6 (лодка 1 — серая, лодка 2 — бирюзовая), вечером 4 : 8 — лодка 2 прошла от A 4 клетки из 12, то есть треть

Проверка. Подставим в единицах $v_1/7$: $v_1 = 7$, $v_2 = 5$, $u = 1$. Утром скорости относительно берега $7 - 1 = 6$ и $5 + 1 = 6$ — равны, встреча посередине. Вечером $7 + 1 = 8$ и $5 - 1 = 4$: лодка 2 проходит долю $4/(4 + 8) = 1/3$ — верно. Течение медленнее лодки 2 ($u < v_2$), иначе она не смогла бы идти против течения.

Смысл. Течение меняет скорости лодок относительно берега, но не их сумму: поэтому время встречи $t_* = l/(v_1 + v_2)$ утром и вечером одно и то же, а течение влияет только на место встречи.

Ответ. $v_2 = \dfrac{5}{7} v_1 \approx 14{,}3$ км/ч.