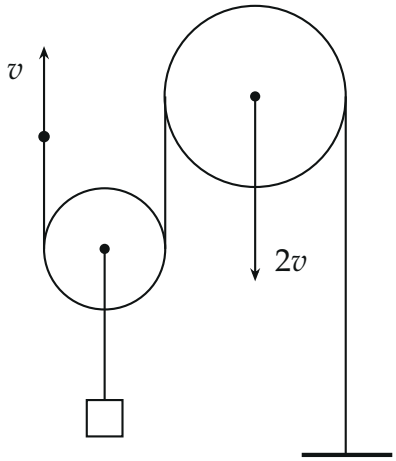
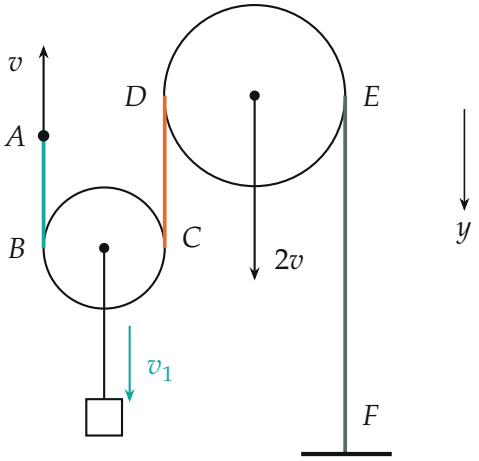
Тело на блоках

Задача 5. [Росатом 2022/23, отборочный этап, 7 класс, Москва, задача 5] Через блоки переброшена веревка, один конец которой закреплен на полу, второй тянут вверх со скоростью v. К оси левого блока прикреплено тело. Найти скорость тела, если правый блок перемещают вниз со скоростью $2v$. Куда направлена эта скорость? Нити нерастяжимы.



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на кинематические связи: верёвка нерастяжима, поэтому её полная длина не меняется. Верёвка состоит из трёх прямых кусков (дуги на блоках имеют постоянную длину). Когда концы и блоки двигаются, одни куски удлиняются, другие укорачиваются — но сумма изменений длин равна нулю. Каждое изменение длины выражается через скорости концов этого куска. Отсюда и найдём скорость левого блока, а с ним — тела.

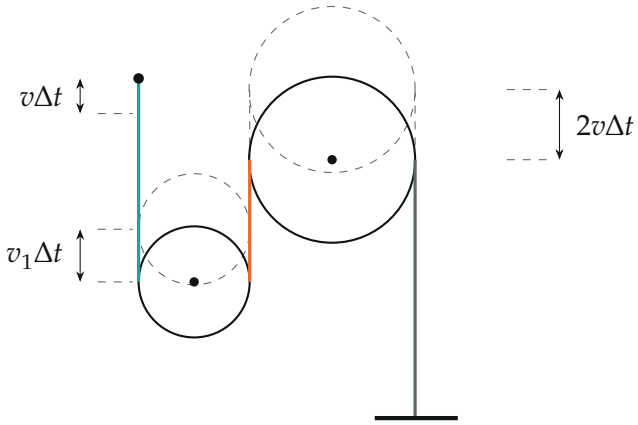
Обозначения. Ось y направим вертикально вниз. AB — кусок от свободного конца A до левого блока, CD — кусок между блоками, EF — кусок от правого блока до пола. v_1 — скорость левого блока (и тела, оно висит на его оси); предположим, что она направлена вниз. Если на самом деле вверх — получится $v_1 < 0$.



Три прямых куска верёвки: AB (бирюзовый), CD (оранжевый), EF (серый); ось y — вниз, скорость тела v_1 предполагаем вниз

1. Изменение длины каждого куска за время Δt. Длина вертикального куска — разность координат его нижнего и верхнего концов. За время Δt:

- кусок AB: верхний конец A поднимается на $v\Delta t$, нижний B (низ левого блока) опускается на $v_1\Delta t$ — кусок удлиняется с двух сторон:
$$\Delta l_{AB} = (v + v_1)\,\Delta t;$$
- кусок CD: нижний конец C (на левом блоке) опускается на $v_1\Delta t$ — длина растёт; верхний D (на правом блоке) опускается на $2v\Delta t$ — длина уменьшается:
$$\Delta l_{CD} = (v_1 - 2v)\,\Delta t;$$
- кусок EF: нижний конец F закреплён на полу, верхний E опускается вместе с правым блоком:
$$\Delta l_{EF} = -2v\,\Delta t.$$



Положение верёвки и блоков до (серый пунктир) и через Δt (сплошные линии): кусок AB вырос, CD и EF укоротились

2. Условие нерастяжимости. Длина всей верёвки не меняется, а дуги на блоках остаются прежними (радиусы блоков не меняются). Значит, сумма изменений длин прямых кусков равна нулю:

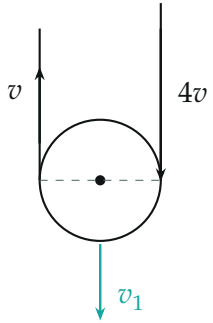
$$\Delta l_{AB} + \Delta l_{CD} + \Delta l_{EF} = 0 \quad \Rightarrow \quad (v + v_1) + (v_1 - 2v) - 2v = 0.$$

3. Скорость тела.

$$2v_1 - 3v = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{3}{2}v.$$

Получилось $v_1 > 0$ — значит, предположение верно: левый блок, а с ним и тело, движется *вниз* со скоростью $\frac{3}{2}v$.

4. Второй способ — через скорость самой верёвки. Посмотрим, как движутся точки верёвки. Кусок EF привязан к полу и прямой, поэтому вся его верёвка покоится. В системе отсчёта правого блока (она движется вниз со скоростью $2v$) верёвка куска EF движется вверх со скоростью $2v$, обегает блок и в куске CD движется вниз с той же скоростью $2v$. Относительно земли верёвка куска CD идёт вниз со скоростью $2v + 2v = 4v$. Кусок AB движется вверх со скоростью v вместе с концом A.



Скорости верёвки по обе стороны левого блока: слева v вверх, справа $4v$ вниз

Перейдём в систему отсчёта левого блока (движется вниз со скоростью v_1). В ней верёвка просто обегает блок, и по обе его стороны движется с одинаковой по модулю скоростью: слева вверх $v + v_1$, справа вниз $4v - v_1$. Приравниваем:

$$v + v_1 = 4v - v_1 \quad \Rightarrow \quad 2v_1 = 3v, \quad v_1 = \frac{3}{2}v.$$

Тот же ответ: скорость оси блока — полусумма скоростей верёвки по его сторонам с учётом знака, $\frac{4v+(-v)}{2} = \frac{3}{2}v$.

Обратите внимание: в куске CD двигаются оба конца, и их перемещения вычитаются; удобно спрашивать про каждый конец отдельно: «длина от этого растёт или убывает?».

Проверка. Размерность — скорость. Частные случаи: если правый блок неподвижен, сумма $(v + v_1) + v_1 = 0$ даёт $v_1 = -\frac{v}{2}$ — тело поднимается вдвое медленнее конца, как у обычного подвижного блока; если не тянуть конец ($v = 0$), а правый блок опускать со скоростью $2v$, то верёвка по правую сторону левого блока идёт вниз со скоростью $4v$, и левый блок опускается со скоростью $2v$ — вдвое медленнее, тоже как у подвижного блока. Ответ $\frac{3}{2}v$ — сумма этих двух вкладов: $-\frac{v}{2} + 2v$.

Смысл: опускание правого блока «вытягивает» верёвку через левый блок вниз сильнее, чем подтягивание конца поднимает его, поэтому тело опускается.

Ответ. $v_1 = \frac{3}{2}v$, направлена вниз.