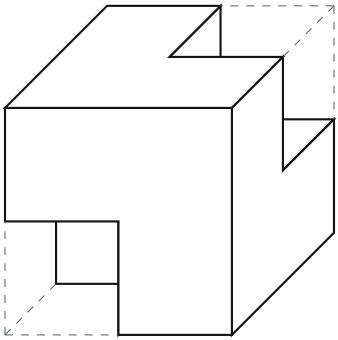
Куб с вырезанными кубами

Задача 1. [Росатом 2022/23, отборочный этап, 7 класс, регионы, задача 1] Тело в форме куба с ребром имеет массу m. Из двух противоположных углов куба вырезают два меньших по размеру куба так, что они касаются вершинами в центре большого куба (см. рисунок). Найти массу получившегося тела.

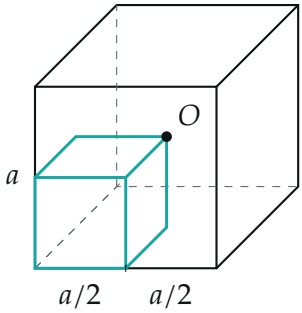


▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на связь массы и объёма однородного тела: $m = \rho V$. Плотность у вырезанных кубиков та же, что у всего куба, поэтому их массы относятся к массе куба как их объёмы к объёму куба. Главное — понять размер вырезанного кубика: его вершина лежит в углу большого куба, противоположная — в центре.

Обозначения. a — ребро большого куба, ρ — плотность, b — ребро вырезанного кубика, m_1 — масса одного вырезанного кубика, M — масса получившегося тела, O — центр большого куба.

1. Масса большого куба. Объём куба a^3, поэтому

$$m = \rho a^3.$$



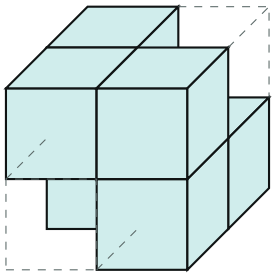
Вырезанный кубик (бирюзовый) от угла до центра O: по каждому ребру он занимает ровно половину

2. Ребро вырезанного кубика. Центр O большого куба отстоит от каждой его грани на $a/2$. Вырезанный кубик стоит в углу: три его грани лежат на гранях большого куба, а противоположная вершина — в точке O. Значит, вдоль каждого ребра он простирается от грани до середины куба:

$$b = \frac{a}{2}.$$

3. Масса вырезанного кубика. Его объём $b^3 = \dfrac{a^3}{8}$, плотность та же, поэтому

$$m_1 = \rho\,\frac{a^3}{8} = \frac{m}{8}.$$

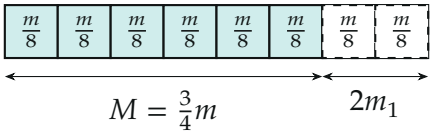


Плоскости через центр делят куб на 8 одинаковых кубиков; вырезаны два (пунктир), осталось шесть

4. Масса получившегося тела. Масса оставшейся части — масса куба без масс двух вырезанных кубиков:

$$M = m - 2m_1 = m - \frac{2m}{8} = \frac{3}{4}\,m.$$

Тот же ответ без формул: три плоскости через центр, параллельные граням, делят куб на 8 одинаковых кубиков с ребром $a/2$. Вырезаны ровно два из них, осталось шесть из восьми, то есть $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ массы.



Масса куба — восемь долей по $m/8$; две доли вырезаны

Обратите внимание: вырезанный кубик не «половина куба». Ребро у него вдвое меньше, а объём — в $2^3 = 8$ раз меньше.

Проверка. Размерность — масса. Сумма: $M + 2m_1 = \frac{3}{4}m + \frac{1}{4}m = m$. Числами: куб с ребром 2 см из материала плотностью 1 г/см^3 весит 8 г, каждый вырезанный кубик с ребром 1 см — 1 г, остаётся 6 г $= \frac{3}{4} \cdot 8$ г.

Смысл: масса пропорциональна объёму, а объём — кубу размера, поэтому уменьшение ребра вдвое уменьшает массу в восемь раз.

Ответ. $M = \dfrac{3}{4}\,m.$