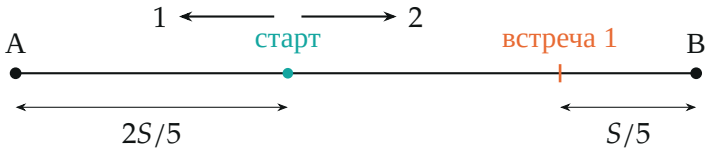
Встречи двух машин

Задача 5. [Росатом 2022/23, отборочный этап, 7 класс, регионы, задача 5] Между двумя городами A и B, расстояние между которыми S, ездят две машины. Они одновременно начали двигаться из точки, лежащей на расстоянии $2S/5$ от города A, одна в направлении A, вторая — B. Доехав до этих городов, машины разворачиваются и едут навстречу друг другу. Известно, что машины встретились на расстоянии $S/5$ от города B. Встретившись, машины разворачиваются и едут в направлении «своих» городов. Доехав до них, машины снова разворачиваются и едут навстречу друг другу. Снова встречаются, разворачиваются и так далее. На каком расстоянии от города A произойдёт 2023 встреча машин? Какое расстояние пройдёт от старта до 2023 встречи та машина, которая разворачивается в городе A? Считать, что машины движутся с постоянными скоростями, а разворачиваются мгновенно.



Поясняющий рисунок: старт на расстоянии $2S/5$ от A, первая встреча — на расстоянии $S/5$ от B; машина 1 едет к A, машина 2 — к B

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на равномерное движение и периодичность. Скорости машин постоянны, поэтому пути, пройденные ими за одно и то же время, относятся как скорости. Ключевое наблюдение: между любыми двумя соседними встречами машины вместе проходят один и тот же путь $2S$. Значит, и каждая машина за это время проходит одно и то же расстояние — столько же, сколько от старта до первой встречи. Отсюда движение повторяется: встречи происходят по очереди в двух точках.

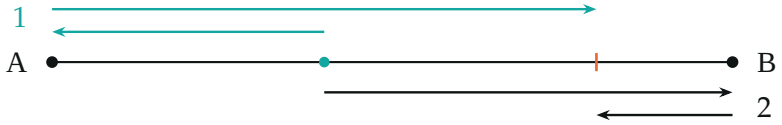
Обозначения. Машина 1 — та, что разворачивается в A, машина 2 — в B. v_1, v_2 — их скорости, L_1, L_2 — пути от старта до первой встречи, x — расстояние от A.

1. Пути до первой встречи. Машина 1 едет от старта до A ($2S/5$) и потом от A до места встречи ($S - S/5 = 4S/5$); машина 2 — от старта до B ($3S/5$) и обратно до встречи ($S/5$):

$$L_1 = \frac{2S}{5} + \frac{4S}{5} = \frac{6S}{5}, \qquad L_2 = \frac{3S}{5} + \frac{S}{5} = \frac{4S}{5}.$$

Вместе они прошли $L_1 + L_2 = 2S$: каждый «кусок» отрезка AB пройден дважды — один раз туда, один раз обратно. Время у машин одинаковое, поэтому

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{L_1}{L_2} = \frac{3}{2}.$$



Пути от старта до первой встречи: машина 1 (бирюзовая) — $2S/5 + 4S/5 = 6S/5$, машина 2 (чёрная) — $3S/5 + S/5 = 4S/5$

2. От встречи до встречи. После встречи машины разъезжаются к своим городам, разворачиваются и едут навстречу. От одной встречи до следующей машина 1 проходит путь от точки встречи до A и обратно до новой встречи, машина 2 — до B и обратно. Вместе это снова дважды отрезок AB:

$$L_1' + L_2' = 2S.$$

Время у них общее, скорости те же, поэтому пути делятся в том же отношении 3 : 2:

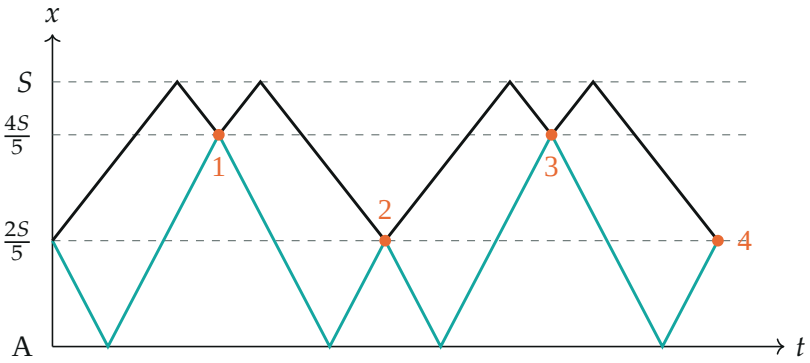
$$L_1' = \frac{3}{5} \cdot 2S = \frac{6S}{5}, \qquad L_2' = \frac{4S}{5}.$$

Каждая машина между любыми двумя соседними встречами проходит столько же, сколько от старта до первой встречи.

3. Где происходят встречи. Вторая встреча: машина 1 от точки $x = 4S/5$ едет к A ($4S/5$) и проходит ещё $6S/5 - 4S/5 = 2S/5$ — она в точке $x = 2S/5$, то есть в точке старта. Третья встреча: от точки старта машина

1 снова проходит $2S/5$ до A и ещё $4S/5$ — это опять точка $x = 4S/5$. Дальше всё повторяется:

$$\text{нечётные встречи: } x = \frac{4S}{5}, \qquad \text{чётные: } x = \frac{2S}{5}.$$



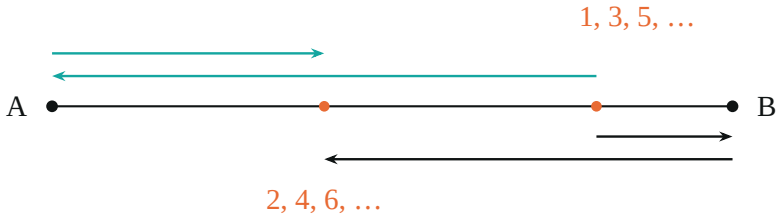
Координаты машин от времени (посчитаны для $v_1 : v_2 = 3 : 2$): машина 1 — бирюзовая, машина 2 — чёрная; встречи (оранжевые точки) по очереди в $x = 4S/5$ и $x = 2S/5$

4. 2023 встреча. Номер 2023 нечётный, поэтому встреча — там же, где первая:

$$x_{2023} = \frac{4S}{5} \quad \text{(на расстоянии } S/5 \text{ от B)}.$$

5. Путь машины 1. До первой встречи она прошла $6S/5$, и между каждыми двумя соседними встречами ещё по $6S/5$ (2022 промежутка):

$$L = \frac{6S}{5} + 2022 \cdot \frac{6S}{5} = 2023 \cdot \frac{6S}{5} = \frac{12138}{5} S = 2427{,}6\, S.$$



От первой встречи до второй: машина 1 проходит $4S/5 + 2S/5 = 6S/5$, машина 2 — $S/5 + 3S/5 = 4S/5$

Обратите внимание: «разворачиваются при встрече» не меняет картины, если смотреть на сумму путей: каждый промежуток между встречами — это два «рейса» по отрезку в сумме, $2S$. Без этого наблюдения пришлось бы прослеживать 2023 встречи по одной.

Проверка. Размерность: ответы — длины. Вторая встреча: машина 2 от $x = 4S/5$ проходит $S/5$ до B и ещё $3S/5$ назад — тоже точка $x = 2S/5$, обе машины сходятся в одной точке. На графике видна та же периодичность: картина повторяется через каждые две встречи. Путь машины 2 до 2023 встречи — $2023 \cdot \frac{4S}{5}$, сумма путей $2023 \cdot 2S$, как и должно быть.

Смысл: после первой встречи движение становится периодическим с периодом в две встречи, поэтому 2023 встреча совпадает с первой.

Ответ. На расстоянии $\dfrac{4S}{5}$ от A; путь машины, разворачивающейся в A, $L = 2023 \cdot \dfrac{6S}{5} = \dfrac{12138}{5} S = 2427{,}6\,S$.