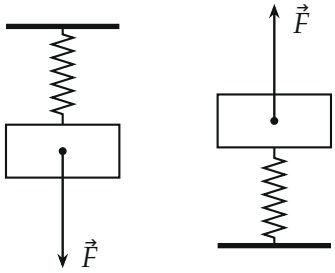
Груз на пружине, растянутой силой

Задача 3. [Росатом 2022/23, отборочный этап, 8 класс, Москва, задача 3] Груз, подвешенный к потолку с помощью пружины, тянут вниз некоторой силой F. Затем тот же груз с той же пружиной привязывают к полу и тянут вверх той же силой F (см. рисунок). Известно, что в обоих случаях пружина оказывается растянутой, и её удлинения в этих случаях отличаются в два раза. Найти отношение силы тяжести груза к силе F. При любых удлинениях пружины справедлив закон Гука: удлинение пружины пропорционально приложенной к ней силе.

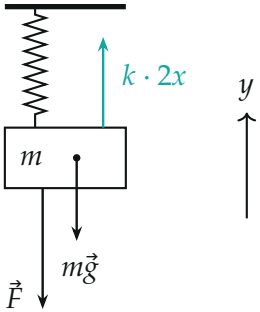


▲ **Решение. Что происходит.** Задача на равновесие тела под действием трёх сил: тяжести, внешней силы F и силы упругости пружины. В первом случае тяжесть и F тянут груз в одну сторону (вниз) и растягивают пружину вместе; во втором тяжесть направлена против F и «помогает» пружине: растяжение создаёт только разность сил. Поэтому в первом случае удлинение больше — вдвое.

Обозначения. m — масса груза, mg — сила тяжести; k — жёсткость пружины; x — удлинение во втором случае, $2x$ — в первом. Ось y — вверх.

1. Первый случай: груз под потолком. Растянутая пружина тянет груз вверх (к потолку) силой $k \cdot 2x$, сила тяжести $m\vec{g}$ и сила $\vec{F}$ — вниз. Второй закон Ньютона для покоящегося груза в проекции на ось y:

$$k \cdot 2x - mg - F = 0 \quad \Rightarrow \quad 2kx = F + mg.$$

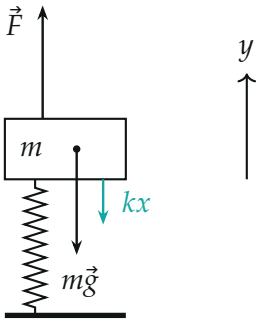


Первый случай: тяжесть и $\vec{F}$ вниз, сила упругости $2kx$ вверх

2. Второй случай: груз над полом. Пружина растянута, значит, тянет груз вниз (к полу) силой kx. Сила тяжести тоже вниз, $\vec{F}$ — вверх. Проекция на ось y:

$$F - mg - kx = 0 \quad \Rightarrow \quad kx = F - mg.$$

Пружина растянута, поэтому $kx > 0$ и $F > mg$.



Второй случай: $\vec{F}$ вверх, тяжесть и сила упругости kx вниз

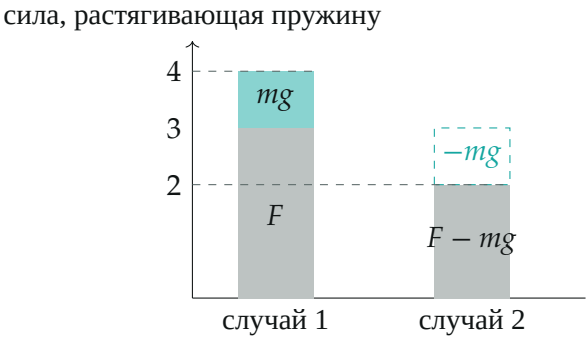
3. Отношение. Делим первое уравнение на второе, жёсткость и удлинение сокращаются:

$$\frac{2kx}{kx} = \frac{F + mg}{F - mg} = 2 \quad \Rightarrow \quad F + mg = 2F - 2mg,$$

$$3mg = F, \qquad \frac{mg}{F} = \frac{1}{3}.$$

Обратите внимание: «удлинения отличаются в два раза» — не сказано, где больше. Удлинение больше там, где тяжесть и F складываются, то есть в первом случае; обратный вариант дал бы $F - mg = 2(F + mg)$, $F = -3mg < 0$ — невозможно.

Проверка. Подставим $mg = F/3$: в первом случае пружину растягивает $F + F/3 = \frac{4}{3}F$, во втором $F - F/3 = \frac{2}{3}F$ — ровно вдвое меньше. Предел: при $mg \to 0$ удлинения одинаковы (отношение 1), при $mg \to F$ второе удлинение стремится к нулю.



Сила, растягивающая пружину, в единицах mg (при $F = 3mg$): $4mg$ и $2mg$ — отношение 2

Смысл: внешняя сила втрое больше веса груза — только тогда пружина во втором случае остаётся растянутой и удлинения различаются вдвое.

Ответ. $\dfrac{mg}{F} = \dfrac{1}{3}$.