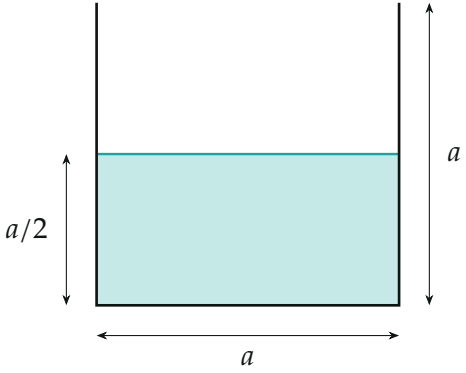
Льдина в аквариуме

Задача 4. [Росатом 2022/23, отборочный этап, 8 класс, Москва, задача 4] Аквариум в форме куба с ребром a заполнен водой до половины. Найти максимальный размер ребра кубической льдины, которую можно поместить в аквариум без перелива воды через край и без касания льдиной дна сосуда. Плотность льда составляет 0,9 от плотности воды.



Поясняющий рисунок: вертикальное сечение аквариума, вода налита до половины

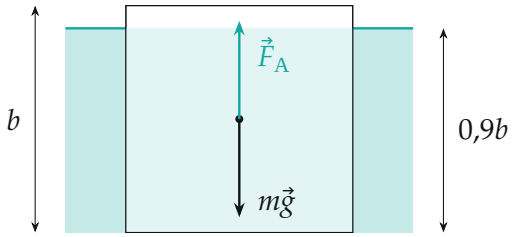
▲ **Решение. Что происходит.** Задача на плавание тел (закон Архимеда) и сохранение объёма воды. Плавающая льдина вытесняет воду, уровень поднимается. Чем больше льдина, тем выше уровень — и тем глубже её нижняя грань. Надо выяснить, какое из двух ограничений («не перелить» и «не коснуться дна») наступит раньше.

Обозначения. b — ребро льдины; $\rho_л = 0{,}9\,\rho_в$ — плотности льда и воды; $V_{пч}$ — объём погружённой части льдины; H — уровень воды с льдиной.

1. Какая часть льдины под водой. Условие плавания (равновесие льдины, первый закон Ньютона в проекции на вертикаль): сила тяжести уравновешена силой Архимеда,

$$\rho_л\, b^3 g = \rho_в\, g\, V_{пч} \quad \Rightarrow \quad V_{пч} = \frac{\rho_л}{\rho_в}\, b^3 = 0{,}9\, b^3.$$

Льдина плавает гранью горизонтально, значит, погружена на глубину $0{,}9\,b$.



Льдина плавает: сила тяжести и сила Архимеда уравновешены, под водой 0,9 её высоты

2. Уровень воды с льдиной. Закон сохранения объёма воды: вода объёмом $\frac{1}{2}a^3$ вместе с погружённой частью льдины занимают в сосуде (сечение a^2) высоту

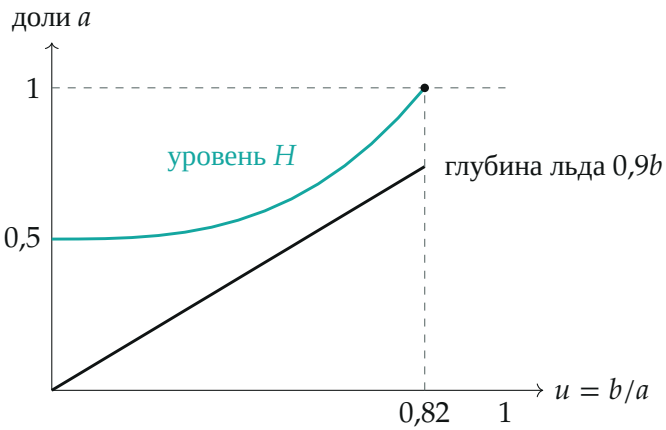
$$H = \frac{\frac{1}{2}a^3 + 0{,}9\,b^3}{a^2} = \frac{a}{2} + \frac{0{,}9\,b^3}{a^2}.$$

Это справедливо, пока льдина плавает, то есть её нижняя грань выше дна: $0{,}9\,b < H$.

3. Что наступит раньше. Перелива нет, пока $H \le a$. Касания дна нет, пока $H - 0{,}9\,b > 0$. В долях ребра аквариума $u = b/a$:

$$\frac{H}{a} = \frac{1}{2} + 0{,}9\,u^3 \le 1, \qquad \frac{H - 0{,}9b}{a} = \frac{1}{2} + 0{,}9u^3 - 0{,}9u > 0.$$

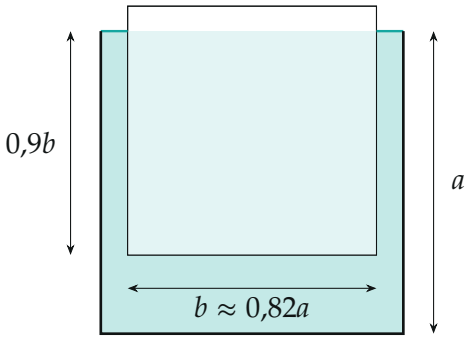
Второе выражение наименьшее при $u = 1/\sqrt{3} \approx 0{,}58$ и равно там $\approx 0{,}15 > 0$: льдина дна не коснётся ни при каком размере. Так и по смыслу: даже льдина во всё сечение ($b = a$) погружалась бы на $0{,}9a$, а вода стояла бы на высоте $1{,}4a$ — выше. Ограничивает только перелив.



Уровень воды и глубина нижней грани льдины в долях a: бирюзовая кривая всегда выше чёрной (дна льдина не касается) и доходит до края при $u \approx 0{,}82$

4. Предельная льдина. Наибольшая льдина — та, при которой вода поднялась ровно до края, $H = a$:

$$\frac{1}{2}a^3 + 0{,}9\,b^3 = a^3 \quad \Rightarrow \quad b^3 = \frac{a^3}{2 \cdot 0{,}9} = \frac{5}{9}a^3, \qquad b = \sqrt[3]{\frac{5}{9}}\,a \approx 0{,}82\,a.$$



Предельный случай: вода дошла до края, под льдиной ещё остаётся слой воды $\approx 0{,}26a$

Обратите внимание: проверять «не касается дна» обязательно — для других плотностей или формы сосуда ограничение могло бы быть именно оно. Здесь оно не срабатывает.

Проверка. Размерность: b — длина. В предельном случае $0{,}9b \approx 0{,}74a < a$: под льдиной остаётся $0{,}26a$ воды, и $b < a$ — льдина помещается в сосуд по ширине. Предел: при плотности льда, равной плотности воды, льдина погрузилась бы целиком, и формула дала бы $b^3 = \frac{1}{2}a^3$ — объём льдины равен свободной половине сосуда, как и должно быть.

Смысл: свободной половине объёма сосуда должна равняться погружённая часть льдины.

Ответ. $b = \sqrt[3]{\frac{5}{9}}\,a \approx 0{,}82\,a$ (ограничивает перелив, дна такая льдина не касается).