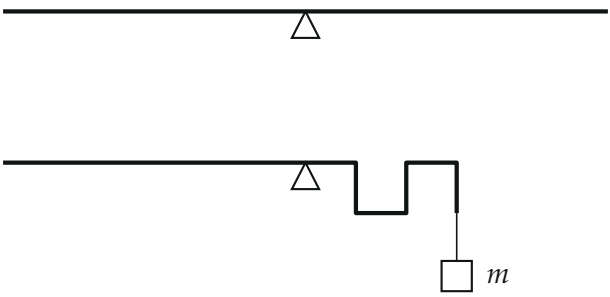
Стержень с изгибами на опоре

Задача 5. [Росатом 2022/23, отборочный этап, 8 класс, Москва, задача 5] Однородный стержень массой M уравновешен на точечной опоре (верхний рисунок). На одной из половин стержня делают пять изгибов, делящих её на шесть одинаковых участков, расположенных под прямыми углами друг к другу (нижний рисунок). Груз какой массы m нужно прикрепить к концу стержня (нижний рисунок), чтобы равновесие стержня не нарушилось?



▲ **Решение. Что происходит.** Задача на правило моментов (равновесие рычага). Изгибы не меняют массу правой половины, но подтягивают её участки к опоре — момент силы тяжести справа уменьшается, равновесие нарушается. Груз m на конце должен вернуть недостающий момент.

Обозначения. l — длина стержня, $l/2$ — длина каждой половины. Участок согнутой половины имеет длину $\dfrac{l/2}{6} = \dfrac{l}{12}$ и массу $\dfrac{M}{12}$. Плечо силы — горизонтальное расстояние от опоры до линии действия силы (вертикали через центр участка).

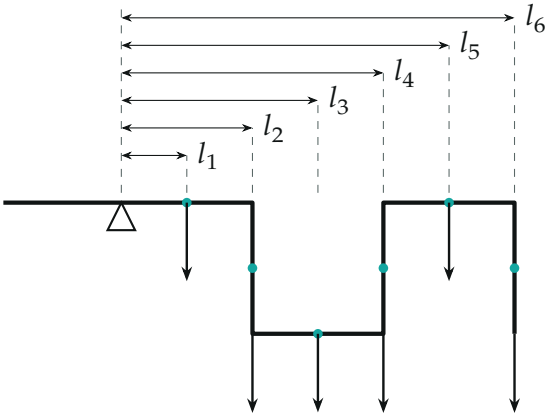
1. Почему опора не сдвигается. До изгиба опора была под серединой стержня. Изгибы делают только с правой половиной, левая и положение опоры прежние. Условие равновесия рычага: моменты сил тяжести слева и справа относительно опоры равны.

2. Момент левой половины. Масса $M/2$, центр — в середине половины, плечо $l/4$:

$$N_{\text{лев}} = \frac{M}{2}g \cdot \frac{l}{4} = \frac{Mgl}{8} = \frac{12}{96}Mgl.$$

3. Моменты участков справа. Участки идут по очереди: горизонтальный, вертикальный, горизонтальный, вертикальный, горизонтальный, вертикальный. Центр горизонтального участка — в его середине, центр вертикального — на вертикали его положения. Плечи (в долях $l/24$, половины длины участка):

$$l_1 = \frac{l}{24}, \quad l_2 = \frac{2l}{24}, \quad l_3 = \frac{3l}{24}, \quad l_4 = \frac{4l}{24}, \quad l_5 = \frac{5l}{24}, \quad l_6 = \frac{6l}{24} = \frac{l}{4}.$$



$\frac{M}{12}\vec{g}$ на каждый участок

Согнутая половина: центры участков (точки), силы тяжести $\frac{M}{12}\vec{g}$ и их плечи $l_1, \ldots, l_6$ относительно опоры; у вертикальных участков стрелка продолжает линию действия силы ниже участка

Сумма моментов шести участков:

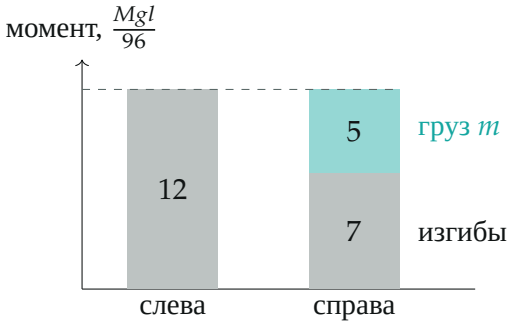
$$N_{\text{изг}} = \frac{M}{12} g \frac{l}{24} (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{21}{288} Mgl = \frac{7}{96} Mgl.$$

Груз висит на нити под концом стержня; конец — на расстоянии $l_6 = l/4$ от опоры, его момент $mg\,\dfrac{l}{4}$.

4. Правило моментов. Сумма моментов, вращающих по часовой

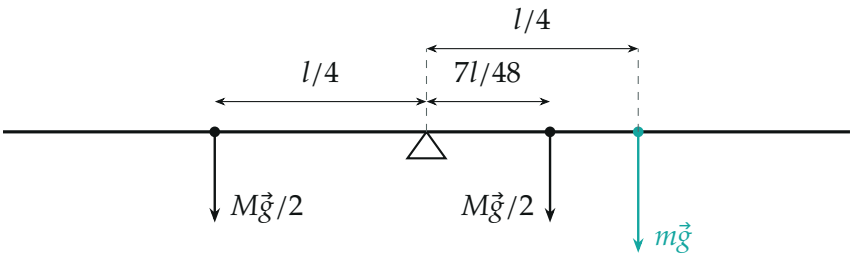
стрелке (справа), равна сумме моментов против (слева):

$$\frac{7}{96}Mgl + mg\,\frac{l}{4} = \frac{12}{96}Mgl \quad\Rightarrow\quad m\,\frac{24}{96} = \frac{5}{96}M \quad\Rightarrow\quad m = \frac{5}{24}M.$$



Баланс моментов в единицах $Mgl/96$: недостающие 5 единиц даёт груз на конце

Второй способ — через центр масс. Согнутая половина массы $M/2$ действует как точка в своём центре масс x_c: $\frac{M}{2}\,x_c = \frac{7}{96}Ml$, $x_c = \frac{7}{48}l$ — ближе к опоре, чем прежние $\frac{12}{48}l = \frac{l}{4}$. Правило моментов: $\frac{M}{2}\cdot\frac{7l}{48} + m\frac{l}{4} = \frac{M}{2}\cdot\frac{l}{4}$, откуда снова $m = \frac{M}{2}\cdot\frac{5}{12} = \frac{5}{24}M$.



Эквивалентная схема: каждая половина заменена точкой в её центре масс

Обратите внимание: у вертикальных участков плечо — расстояние до самого участка по горизонтали, их длина в плечо не входит; поэтому изгибы «сжимают» половину вдвое по горизонтали: конец оказывается на $l/4$ вместо $l/2$.

Проверка. Размерность: m — масса. Без изгибов (плечи $\frac{l}{24} \cdot 1, 3, 5, \ldots, 11$, сумма 36) правый момент $\frac{M}{12} \cdot \frac{36}{24} gl = \frac{12}{96} Mgl$ — ровно левый, груз не нужен, как и было. Груз меньше массы половины ($\frac{5}{24} M < \frac{1}{2} M$), потому что висит на самом дальнем плече.

Смысл: изгибы уменьшили момент правой половины с 12 до 7 единиц $Mgl/96$; груз на плече $l/4$ должен добавить 5.

Ответ. $m = \dfrac{5}{24} M$.