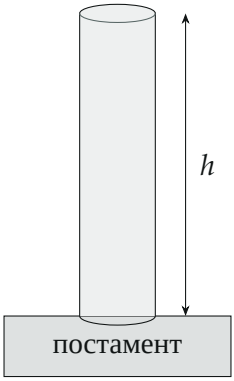
Давление колонны

Задача 1. [Росатом 2022/23, отборочный этап, 8 класс, регионы, задача 1] Высота гранитной колонны «Александрийский столп» в Санкт-Петербурге $h = 25{,}6$ м. Каково давление колонны на постамент? Плотность гранита 2600 кг/м^3. $g = 10$ м/с^2. Считать, что колонна цилиндрическая.



Поясняющий рисунок: цилиндрическая колонна высотой h на постаменте

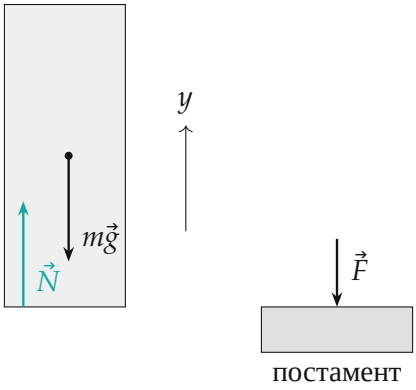
▲ **Решение. Что происходит.** Задача на давление твёрдого тела на опору. Колонна покоится: постамент держит её силой, равной силе тяжести; с такой же силой (третий закон Ньютона) колонна давит на постамент. Давление — эта сила, делённая на площадь основания. Площадь в ответ не войдёт: и масса, и площадь пропорциональны сечению.

Обозначения. $\rho = 2600$ кг/м^3 — плотность гранита; S — площадь основания колонны (неизвестна); m — масса колонны; $\vec{N}$ — сила реакции постамента; P — давление.

1. Масса колонны. Объём цилиндра — площадь основания на высоту, масса — плотность на объём:

$$m = \rho V = \rho h S.$$

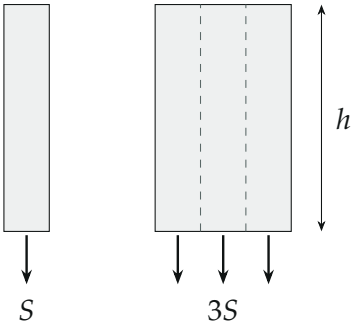
2. Сила давления. Первый закон Ньютона для покоящейся колонны в проекции на вертикальную ось y (вверх): $N - mg = 0$, $N = mg = \rho g h S$. По третьему закону Ньютона колонна давит на постамент силой $F = N = \rho g h S$, направленной вниз.



Слева — силы на колонну: тяжесть $m\vec{g}$ и реакция $\vec{N}$ постамента; справа — сила давления $\vec{F}$ колонны на постамент

3. Давление. Сила распределена по основанию площади S:

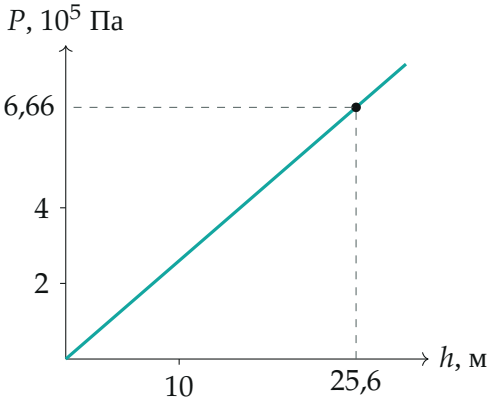
$$P = \frac{F}{S} = \frac{\rho g h S}{S} = \rho g h = 2600 \cdot 10 \cdot 25{,}6\ \text{Па} = 6{,}656 \cdot 10^5\ \text{Па} \approx 6{,}7 \cdot 10^5\ \text{Па}.$$



Колонна втрое толще — втрое тяжелее, но и опирается на втрое большую площадь: давление то же, $\rho g h$

Обратите внимание: площадь основания в условии не дана, и она не нужна — давление однородного вертикального цилиндра зависит только от высоты и плотности, как давление столба жидкости.

Проверка. Размерность: $\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{м} = \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}^2} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \text{Па}$. Порядок: это примерно 6,6 атмосферы — как давление на глубине около 66 м воды (гранит в 2,6 раза плотнее воды, $2{,}6 \cdot 25{,}6 \approx 66$).



Давление цилиндрической гранитной колонны растёт пропорционально высоте: $P = \rho g h$

Смысл: каждый метр гранитной колонны добавляет $\rho g \cdot 1$ м $= 26$ кПа давления на основание.

Ответ. $P = \rho g h \approx 6{,}66 \cdot 10^5$ Па.