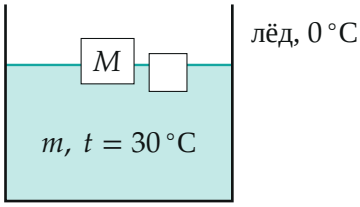
Лёд в воде

Задача 3. [Росатом 2022/23, отборочный этап, 8 класс, регионы, задача 3] Какую максимальную массу льда с температурой $0\,^\circ\mathrm{C}$ можно бросить в воду массой $m = 1{,}5$ кг с начальной температурой $t = 30\,^\circ\mathrm{C}$, чтобы весь лёд растаял? Удельная теплоёмкость воды $c = 4{,}2 \cdot 10^3$ Дж/(кг·град), удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}35 \cdot 10^5$ Дж/кг.



Поясняющий рисунок: в тёплую воду бросают лёд при $0\,^\circ C$

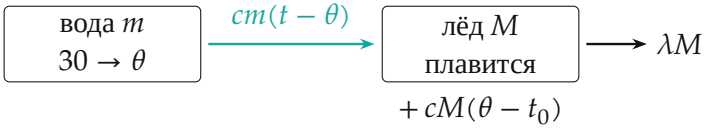
▲ **Решение. Что происходит.** Задача на уравнение теплового баланса. Вода остывает и отдаёт теплоту, лёд её получает и плавится; его температура при плавлении не меняется. Вода не может остыть ниже $0\,^\circ\mathrm{C}$, пока рядом тает лёд, — значит, вода может отдать не больше $cm(t - 0\,^\circ\mathrm{C})$. Наибольшая масса льда, которая растает целиком, — та, на плавление которой уходит вся эта теплота: в конце вся вода при $0\,^\circ\mathrm{C}$.

Обозначения. M — масса льда; $t_0 = 0\,^\circ\mathrm{C}$ — температура плавления; θ — конечная температура; $Q_{\text{отд}}$, $Q_{\text{пол}}$ — отданная водой и полученная льдом теплота. Потерями тепла в окружающую среду пренебрегаем.

1. Тепловой баланс. Сосуд считаем теплоизолированным: сколько теплоты вода отдала, столько лёд (вместе с талой водой) получил. Если растаял весь лёд и смесь при температуре $\theta \geq 0\,^\circ\mathrm{C}$:

$$cm(t - \theta) = \lambda M + cM(\theta - t_0).$$

Справа — плавление и нагрев талой воды, слева — остывание исходной воды.



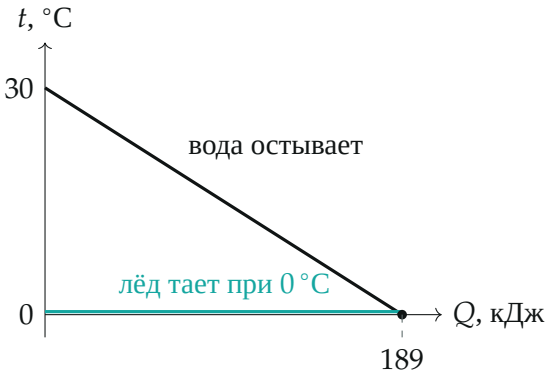
Поток теплоты: остывающая вода отдаёт её льду; лёд тратит её на плавление и (если останется) на нагрев талой воды

2. Максимальная масса. Из баланса

$$M = \frac{cm(t-\theta)}{\lambda + c(\theta - t_0)}.$$

Чем ниже конечная температура θ, тем больше числитель и меньше знаменатель — тем больше M. Самая низкая возможная θ при растаявшем льде — $t_0 = 0\,^\circ\text{C}$ (ниже вода не остынет, пока есть лёд при $0\,^\circ\text{C}$). Подставляем $\theta = t_0$:

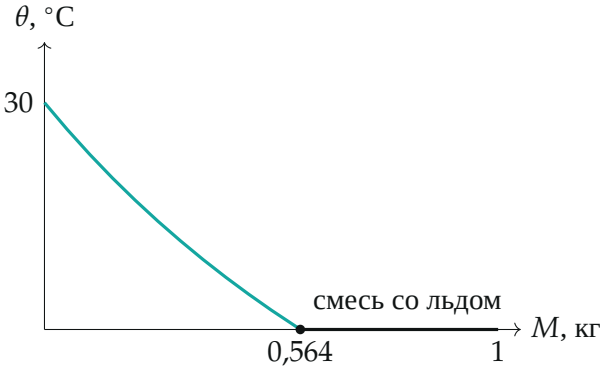
$$M_{\max} = \frac{cm(t-t_0)}{\lambda} = \frac{4{,}2 \cdot 10^3 \cdot 1{,}5 \cdot 30}{3{,}35 \cdot 10^5}\ \text{кг} = \frac{1{,}89 \cdot 10^5}{3{,}35 \cdot 10^5}\ \text{кг} \approx 0{,}564\ \text{кг}.$$



Температура воды и льда от переданной теплоты Q: вода отдаёт $cm \cdot 30^\circ = 189$ кДж; столько же получает тающий лёд

Обратите внимание: если льда больше $M_{\max}$, растает только $M_{\max}$, и в сосуде останется смесь воды со льдом при $0\,^\circ\text{C}$. Если меньше — растает весь, а конечная температура будет выше нуля.

Проверка. Размерность: $\dfrac{\text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{град})\cdot\text{кг}\cdot\text{град}}{\text{Дж}/\text{кг}} = \text{кг}$. Второй способ — через энергию на килограмм: остывание 1 кг воды на 30° даёт 126 кДж, это $\frac{126}{335} \approx 0{,}376$ от теплоты плавления 1 кг льда; на 1,5 кг воды — $1{,}5 \cdot 0{,}376 \approx 0{,}564$ кг льда.



Конечная температура θ от массы брошенного льда (из баланса): до $M_{\max} \approx 0{,}564$ кг лёд тает весь, дальше остаётся нерастаявший лёд при $0\,^\circ C$

Смысл: теплоты остывания полутора килограммов воды на 30° хватает, чтобы растопить чуть больше полукилограмма льда.

Ответ. $M_{\max} = \dfrac{cm(t - t_0)}{\lambda} \approx 0{,}564$ кг.