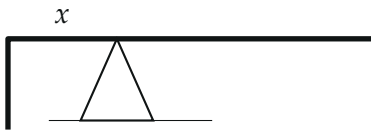
Согнутый стержень на опоре

Задача 4. [Росатом 2022/23, отборочный этап, 8 класс, регионы, задача 4] Конец однородного стержня длиной l согнули под прямым углом так, что длина согнутого участка составляет четвёртую часть длины стержня. На каком расстоянии x от согнутого конца нужно расположить точечную опору, чтобы стержень находился в равновесии?

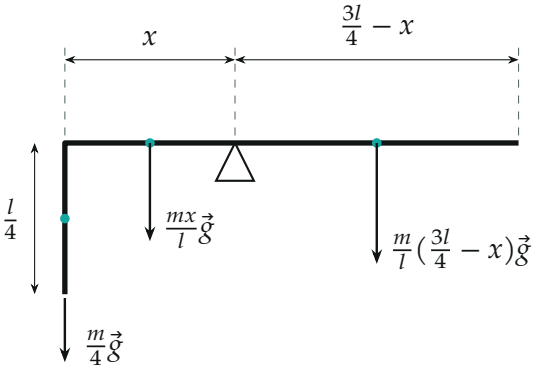


▲ **Решение. Что происходит.** Задача на равновесие рычага (правило моментов). Согнутый участок висит вертикально у левого конца, вся его масса действует на одной вертикали — на расстоянии x от опоры. Опору нужно поставить под центром масс всего стержня; найдём её двумя способами: через моменты частей и через центр масс.

Обозначения. m — масса стержня; горизонтальная часть имеет длину $\frac{3}{4}l$, вертикальная — $\frac{1}{4}l$. Масса куска пропорциональна длине: $m_i = m\dfrac{l_i}{l}$. Плечо — расстояние по горизонтали от опоры до вертикали через центр куска.

1. Три куска и их плечи. Разобьём стержень опорой на три части:

вертикальный участок:	$\dfrac{m}{4}$,	плечо x;
от изгиба до опоры:	$\dfrac{mx}{l}$,	плечо $\dfrac{x}{2}$;
от опоры до правого конца:	$\dfrac{m}{l}\left(\dfrac{3l}{4}-x\right)$,	плечо $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3l}{4}-x\right)$.



Силы тяжести трёх кусков приложены в их центрах; вертикальный участок действует на расстоянии x от опоры

2. Правило моментов. Стержень в равновесии, если суммы моментов сил тяжести слева и справа от опоры равны:

$$\frac{m}{4}g\,x + \frac{mx}{l}g\,\frac{x}{2} = \frac{m}{l}\left(\frac{3l}{4} - x\right)g \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{3l}{4} - x\right).$$

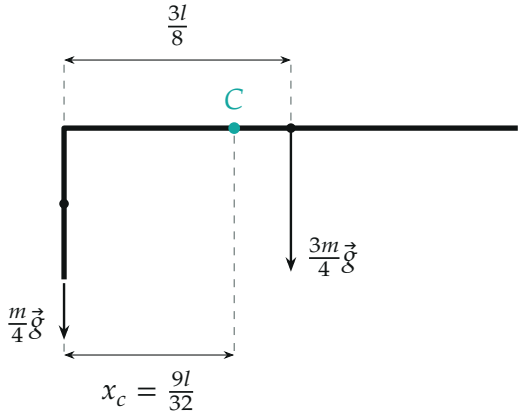
Сокращаем mg и умножаем на $2l$:

$$\frac{lx}{2} + x^2 = \frac{9l^2}{16} - \frac{3lx}{2} + x^2 \quad \Rightarrow \quad 2lx = \frac{9l^2}{16} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{9l}{32}.$$

Квадраты x^2 сократились — уравнение линейное, решение одно.

3. Второй способ — центр масс. Опора должна стоять под центром масс всего стержня. Вертикальный участок ($\frac{m}{4}$) — на вертикали изгиба, горизонтальный ($\frac{3m}{4}$) — центром в середине, на $\frac{3l}{8}$ от изгиба. Координата центра масс от согнутого конца по горизонтали:

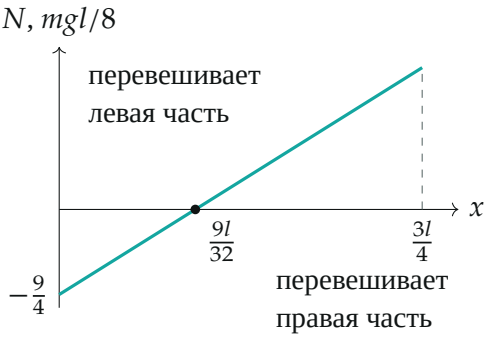
$$x_c = \frac{\frac{m}{4}\cdot 0 + \frac{3m}{4}\cdot\frac{3l}{8}}{m} = \frac{9l}{32}.$$



Центр масс C делит расстояние между центрами частей $\frac{3l}{8}$ в отношении 3 : 1 *(обратно массам)*

Обратите внимание: плечо вертикального участка — это x, а не расстояние до его середины вдоль стержня: сила тяжести вертикальна, и для вертикального куска все его точки на одной линии действия.

Проверка. Размерность — длина. Опора между изгибом и серединой горизонтальной части: $0 < \frac{9l}{32} < \frac{3l}{8} = \frac{12l}{32}$ — сдвиг к тяжёлому согнутому концу. Без изгиба (весь стержень горизонтален, длина l) опора стояла бы под серединой; здесь согнутая четверть «подтягивает» центр масс к левому краю. Момент сил тяжести относительно опоры в точке x равен $mg(x - x_c)$ — линейная функция, ноль ровно при $x = \frac{9l}{32}$.



Суммарный момент сил тяжести (против часовой стрелки) от положения опоры x: линейная функция, ноль при $x = \frac{9l}{32}$

Смысл: опора — под центром масс; согнутая четверть стержня сдвигает его от середины горизонтальной части к изгибу на $\frac{3l}{32}$.

Ответ. $x = \frac{9l}{32}$.