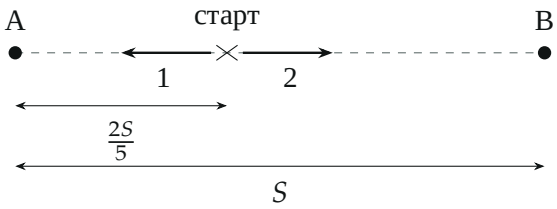
Встречи двух машин

Задача 5. [Росатом 2022/23, отборочный этап, 8 класс, регионы, задача 5] Между двумя городами A и B, расстояние между которыми S, ездят две машины. Они одновременно начали двигаться из точки, лежащей на расстоянии $2S/5$ от города A, одна в направлении A, вторая — B. Доехав до этих городов, машины разворачиваются и едут навстречу друг другу. Известно, что машины встретились на расстоянии $S/5$ от города B. Встретившись, машины разворачиваются и едут в направлении «своих» городов. Доехав до них, машины снова разворачиваются и едут навстречу друг другу. Снова встречаются, разворачиваются и так далее. На каком расстоянии от города A произойдёт 2023 встреча машин? Какое расстояние пройдёт от старта до 2023 встречи та машина, которая разворачивается в городе A? Считать, что машины движутся с постоянными скоростями, а разворачиваются мгновенно.



Поясняющий рисунок: машины 1 и 2 стартуют из точки на $2S/5$ от A в разные стороны

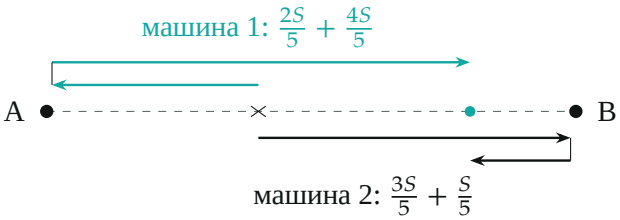
▲ **Решение. Что происходит.** Задача на равномерное движение с периодическим повторением. Ключ — сумма путей двух машин между соседними встречами всегда одна и та же, $2S$: каждая доезжает до своего города и возвращается, вместе они «проходят» отрезок AB туда и обратно. Скорости постоянны, значит, путь каждой машины между встречами тоже постоянный, и картина повторяется.

Обозначения. Машина 1 разворачивается в A, машина 2 — в B; v_1, v_2 — их скорости; x — расстояние от A; L_1 — путь машины 1 между соседними встречами.

1. От старта до первой встречи. Машина 1 едет $\frac{2S}{5}$ до A и обратно до точки встречи $x_1 = S - \frac{S}{5} = \frac{4S}{5}$; машина 2 едет $\frac{3S}{5}$ до B и обратно $\frac{S}{5}$:

$$L_1^{(0)} = \frac{2S}{5} + \frac{4S}{5} = \frac{6S}{5}, \qquad L_2^{(0)} = \frac{3S}{5} + \frac{S}{5} = \frac{4S}{5}.$$

Сумма $2S$. Время у обеих одно, поэтому $\dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{L_1^{(0)}}{L_2^{(0)}} = \dfrac{3}{2}$.



До первой встречи (точка 1, на $4S/5$ от A): пути машин $6S/5$ и $4S/5$

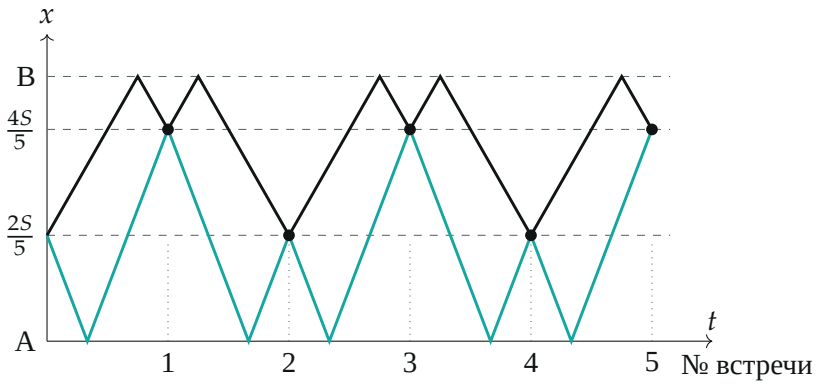
2. Между соседними встречами. После встречи в точке x машина 1 едет к A (x) и обратно до следующей встречи x', машина 2 — к B ($S - x$) и обратно ($S - x'$). Сумма путей:

$$L_1 + L_2 = x + x' + (S - x) + (S - x') = 2S.$$

Время между встречами одно, отношение путей равно отношению скоростей 3 : 2:

$$L_1 = \frac{3}{5} \cdot 2S = \frac{6S}{5}, \qquad L_2 = \frac{4S}{5}.$$

Из первой встречи ($x = \frac{4S}{5}$) машина 1 едет $\frac{4S}{5}$ до A и ещё $\frac{6S}{5} - \frac{4S}{5} = \frac{2S}{5}$ обратно: вторая встреча в точке $\frac{2S}{5}$ — там же, где старт. Из неё снова $\frac{2S}{5}$ до A и $\frac{4S}{5}$ обратно: третья встреча — там же, где первая.



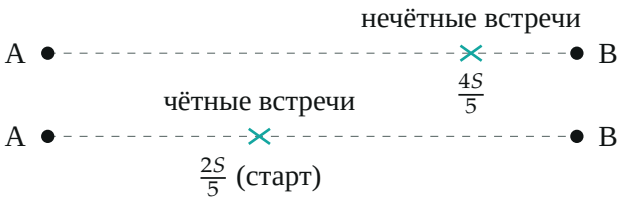
Графики $x(t)$ машин (бирюзовый — машина 1, чёрный — машина 2) при $v_1 : v_2 = 3 : 2$: встречи с нечётными номерами на $4S/5$, с чётными — на $2S/5$

3. Где 2023-я встреча. Встречи чередуются: нечётные — в точке $\frac{4S}{5}$ от A, чётные — в точке старта $\frac{2S}{5}$. Номер 2023 нечётный:

$$x_{2023} = \frac{4S}{5} \text{ от A} \quad \left(\text{и } \frac{S}{5} \text{ от B}\right).$$

4. Путь машины 1. До первой встречи — $\frac{6S}{5}$, и между каждыми соседними встречами ещё по $\frac{6S}{5}$; промежутков от первой до 2023-й — 2022:

$$L = \frac{6S}{5} + 2022 \cdot \frac{6S}{5} = 2023 \cdot \frac{6S}{5} = \frac{12138}{5} S = 2427{,}6\, S.$$



Две точки встреч: 1-я, 3-я, …, 2023-я — на $4S/5$ от A; 2-я, 4-я, … — в точке старта

Обратите внимание: путь от старта до первой встречи тоже равен $\frac{6S}{5}$ — это совпадение условия (старт оказался точкой чётных встреч). Поэтому множитель — 2023, а не 2022: отрезков пути «от встречи до встречи», считая старт, ровно 2023.

Проверка. Размерность: L — длина. Счёт по встречам: после n встреч путь машины 1 равен $n \cdot \frac{6S}{5}$; при $n = 2$ это $\frac{12S}{5}$ — по картинке $\frac{2S}{5} + \frac{4S}{5} + \frac{4S}{5} + \frac{2S}{5} = \frac{12S}{5}$, сходится. Моделирование на python (скорости 3 и 2, $S = 5$) дало точки встреч $4, 2, 4, 2, 4, \ldots$.

Смысл: движение периодично с периодом в две встречи; 2023-я встреча повторяет первую, а путь растёт на $\frac{6S}{5}$ за каждую встречу.

Ответ. 2023-я встреча — на расстоянии $\frac{4S}{5}$ от A; машина, разворачивающаяся в A, пройдёт $L = 2023 \cdot \frac{6S}{5} = \frac{12138}{5} S = 2427{,}6\,S$.