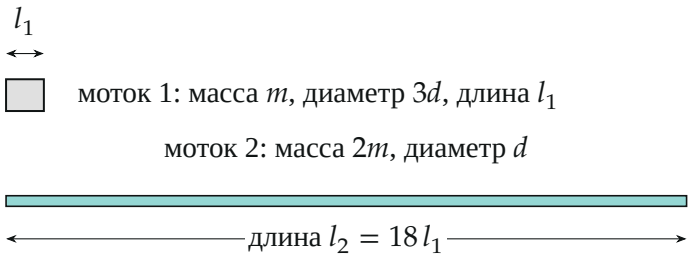
Сопротивление мотков проволоки

Задача 1. [Росатом 2022/23, отборочный этап, 9 класс, задача 1] Имеются два мотка медной проволоки массой m и $2m$. Диаметр проволоки из первого мотка в три раза больше диаметра проволоки из второго. Найти отношение сопротивления первого мотка проволоки к сопротивлению второго.



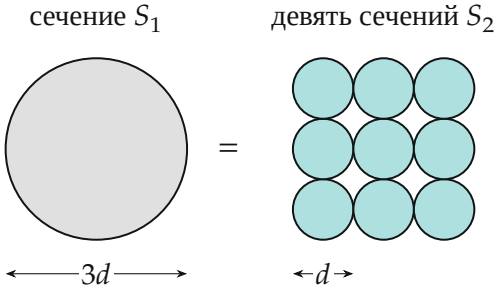
Поясняющий рисунок (в условии рисунка нет): мотки вытянуты в прямые проволоки. Длины и толщины показаны в масштабе, найденном ниже ($l_2 = 18\,l_1$, диаметры $3d$ и d)

▲ **Решение. Что происходит.** Сопротивление проволоки $R = \rho_0 l/S$ зависит от длины и сечения, а у мотка известны масса и диаметр. Длину находим из массы: $m = \rho l S$. Тогда $R = \rho_0 m/(\rho S^2)$: у проволок из одной меди сопротивление пропорционально массе и обратно пропорционально квадрату сечения, а удельное сопротивление ρ_0 и плотность ρ сократятся при делении. Главная идея: тонкая проволока той же массы длиннее и тоньше, поэтому сопротивляется сразу «с двух сторон».

Обозначения. ρ_0 — удельное сопротивление меди, ρ — плотность меди; S_1, S_2 — площади сечений проволок; $D_1 = 3D_2$ — их диаметры; l_1, l_2 — длины; R_1, R_2 — сопротивления мотков.

1. Площади сечений. Сечение — круг, $S = \pi D^2/4$, поэтому площадь пропорциональна квадрату диаметра:

$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2 = 9.$$



Сечения проволок: круг диаметром $3d$ по площади равен девяти кругам диаметром d

2. Длина проволоки из массы. Масса проволоки — плотность на объём, объём — длина на площадь сечения: $m = \rho l S$, откуда $l = \dfrac{m}{\rho S}$. Тогда

$$l_1 = \frac{m}{\rho S_1}, \qquad l_2 = \frac{2m}{\rho S_2} = \frac{2m \cdot 9}{\rho S_1} = 18\, l_1.$$

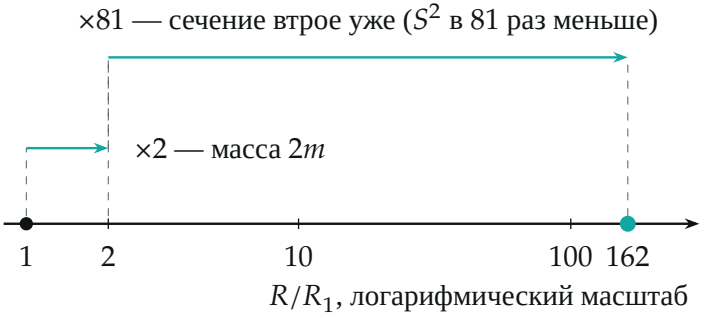
Проволока из второго мотка в 18 раз длиннее: масса вдвое больше, а сечение в девять раз меньше.

3. Сопротивление. Для цилиндрического проводника $R = \rho_0 l / S$. Подставим длину:

$$R = \frac{\rho_0 l}{S} = \frac{\rho_0 m}{\rho S^2}.$$

Для мотков:

$$R_1 = \frac{\rho_0 m}{\rho S_1^2}, \qquad R_2 = \frac{\rho_0 2m}{\rho S_2^2} = \frac{\rho_0 2m \cdot 81}{\rho S_1^2} = 162\, R_1.$$



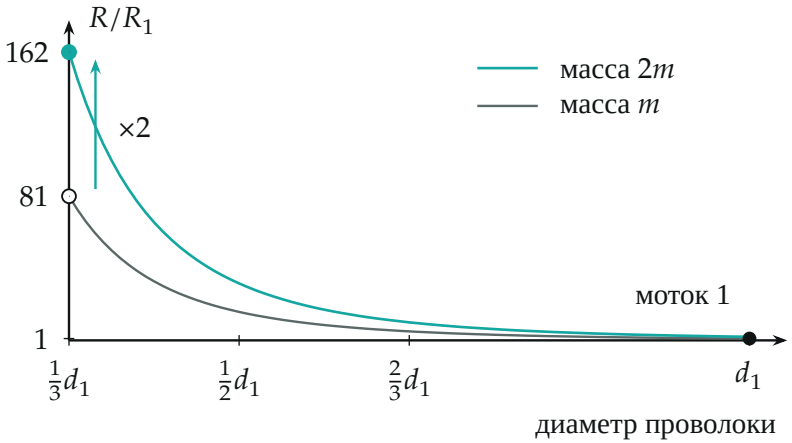
Как набирается множитель 162*: масса даёт* 2*, сечение втрое уже (в квадрате) —* 81*. Шкала логарифмическая: равным отношениям соответствуют равные отрезки*

4. Отношение.

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{162} \approx 6{,}2 \cdot 10^{-3}.$$

Обратите внимание: сечение входит во вторую степень. Один раз — потому что оно стоит в знаменателе $R = \rho_0 l/S$; второй раз — потому что при той же массе тонкая проволока длиннее, $l \propto 1/S$. Если учесть сечение один раз, получится $1/(2 \cdot 9) = 1/18$ — неверно.

Проверка. Второй способ — по длинам и сечениям напрямую: $R \propto l/S$, поэтому $\dfrac{R_2}{R_1} = \dfrac{l_2}{l_1} \cdot \dfrac{S_1}{S_2} = 18 \cdot 9 = 162$. Предел: при одинаковых массах и диаметрах $R_1/R_2 = 1$ — формула $R = \rho_0 m/(\rho S^2)$ даёт это без всякого счёта. Отдельно: если бы проволоки были одинаковой массы, а диаметры отличались втрое, отношение было бы $1/81$; удвоенная масса второго мотка добавляет ещё множитель $1/2$.



Сопротивление в долях R_1 как функция диаметра при постоянной массе: серая кривая — масса m, бирюзовая — масса $2m$ ($R \propto m/d^4$). Моток 1: точка при диаметре d_1; моток 2: диаметр $d_1/3$, масса вдвое больше — 162; тонкая проволока той же массы m дала бы 81 (светлая точка)

Смысл: сопротивление растёт очень быстро при утончении проволоки той же массы — пропорционально четвёртой степени диаметра (сечение во второй, длина тоже).

Ответ. $R_1/R_2 = 1/162$.