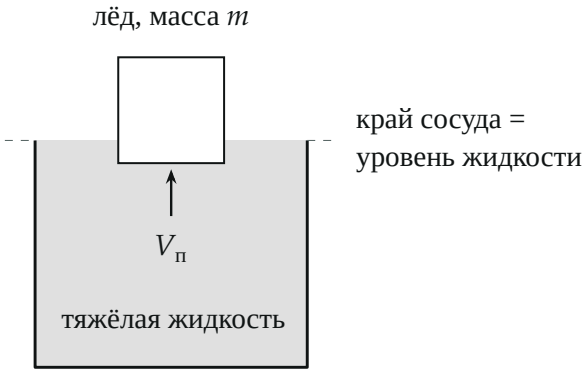
Лёд в тяжёлой жидкости

Задача 3. [Росатом 2022/23, отборочный этап, 9 класс, задача 3] Имеется полностью заполненный сосуд с тяжёлой жидкостью, в котором плавает кусочек водяного льда массой m. Лёд тает. Что произойдёт при этом с жидкостью в сосуде — её уровень понизится, останется неизменным, часть выльется через край? Если уровень понизится, найти объём сосуда, свободный от жидкости. Если жидкость будет переливаться через край, найти объём вылившейся жидкости. Плотность воды ρ, плотность тяжёлой жидкости 10ρ.



Поясняющий рисунок (в условии рисунка нет): сосуд полон, лёд плавает, часть льдинки погружена в тяжёлую жидкость. Глубина погружения показана условно: у льда плотностью $0{,}9\rho$ в жидкость уходит около 9% объёма льдинки; в ответ плотность льда не входит

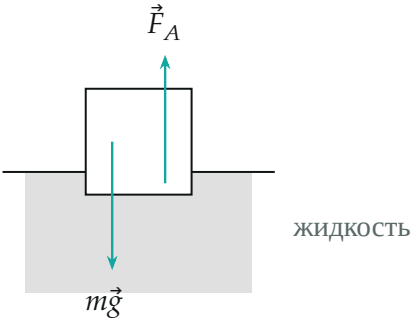
▲ **Решение. Что происходит.** Сосуд полон по самый край, значит, свободного места в нём нет. Плавающий лёд занимает место в сосуде только той частью, которая погружена в жидкость, — это объём $V_п$; часть льдинки над краем в сосуде места не занимает. После таяния вся масса льда m становится водой объёмом $V_в$. Вода легче тяжёлой жидкости и не смешивается с ней, поэтому остаётся сверху. Главная идея: сравнить объём воды, получившейся из льда, с объёмом, который лёд занимал под уровнем жидкости: на это место вода и может встать. Остальное

выльется. Класс задачи — плавание тела и таяние льда в жидкости другой плотности.

Обозначения. $V_\text{п}$ — объём погружённой части льдинки; $V_\text{в}$ — объём воды, получившейся из льда; $\rho_\text{ж} = 10\rho$ — плотность тяжёлой жидкости; ΔV — объём вылившейся жидкости.

1. Условие плавания. Льдинка плавает в равновесии: сила тяжести $m\vec{g}$ вниз уравновешена силой Архимеда $\vec{F}_A$ вверх. Сила Архимеда определяется только погружённой частью:

$$mg = F_A = \rho_\text{ж}\, g\, V_\text{п} = 10\rho\, g\, V_\text{п} \quad \Rightarrow \quad V_\text{п} = \frac{m}{10\rho}.$$



Силы на плавающую льдинку: сила тяжести (из центра льдинки вниз) и сила Архимеда (из центра погружённой части вверх). Они равны по модулю

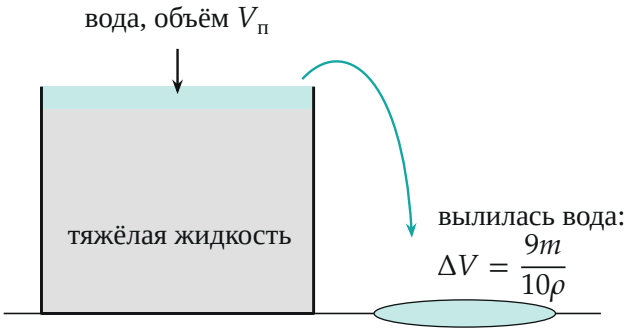
2. Вода, получившаяся из льда. При таянии масса сохраняется, масса получившейся воды — m, её плотность ρ:

$$V_\text{в} = \frac{m}{\rho}.$$

3. Сравнение. До таяния в сосуде лежат тяжёлая жидкость и погружённая часть льдинки — вместе они заполняют сосуд до краёв. Тяжёлая жидкость осталась прежней, поэтому для воды в сосуде свободно ровно то место, которое лёд занимал под уровнем, — объём $V_\text{п}$. Воды же получилось

$$V_\text{в} = \frac{m}{\rho} = 10\, V_\text{п} > V_\text{п}.$$

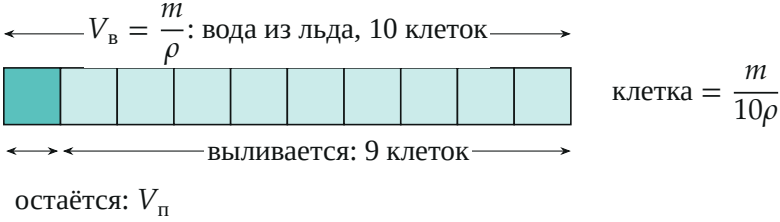
Вода не поместится, и часть выльется через край. Уровень не понизится и не останется прежним.



После таяния: тяжёлая жидкость на прежнем месте, поверх неё слой воды объёма $V_п$ (толщина слоя показана условно). Остальная вода вылилась

4. Объём вылившейся жидкости. Вышло всё, что не поместилось:

$$\Delta V = V_в - V_п = \frac{m}{\rho} - \frac{m}{10\rho} = \frac{9m}{10\rho}.$$



Объёмы в клетках по $\frac{m}{10\rho}$: воды получилось 10 клеток, место есть для одной, 9 выливаются

Обратите внимание: выльется вода — лёгкий верхний слой, а тяжёлая жидкость остаётся в сосуде. Объём самой льдинки и её плотность в расчёт не входят: важны только погружённая часть и масса.

Проверка. Общая формула для жидкости плотностью $k\rho$:

$$\Delta V = \frac{m}{\rho} - \frac{m}{k\rho} = \frac{m}{\rho}\left(1 - \frac{1}{k}\right).$$

При $k = 1$ (вместо тяжёлой жидкости — сама вода) $\Delta V = 0$: уровень при таянии не меняется — известный результат. При $k = 10$ получаем $\frac{9}{10}\frac{m}{\rho}$. Числа: $m = 1$ кг, $\rho = 1000$ кг/м^3: $V_{\text{п}} = 100$ см^3, $V_{\text{в}} = 1000$ см^3, $\Delta V = 900$ см^3. Размерность: m/ρ — объём.

Ответ. Жидкость будет переливаться через край (выльется вода); объём вылившейся жидкости $\Delta V = \frac{9m}{10\rho}$.