Верёвка на столе

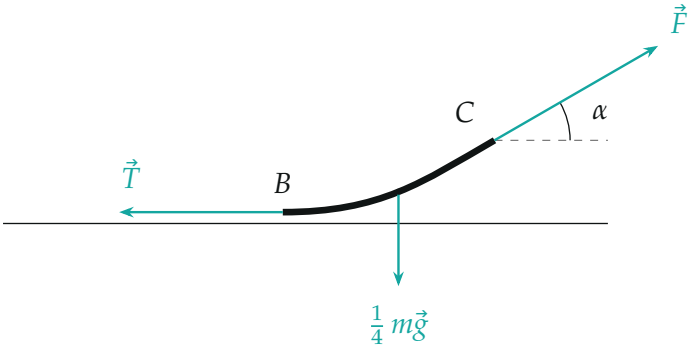
Задача 5. [Росатом 2022/23, отборочный этап, 9 класс, задача 5] На поверхности стола лежит кусок однородной верёвки массой m. На один из концов верёвки действует сила $\vec{F}$, в результате чего $1/4$ часть длины верёвки поднята над столом, $3/4$ длины лежит на столе. Считая, что все точки верёвки находятся в одной вертикальной плоскости, найдите значения коэффициента трения между верёвкой и столом, при которых возможно такое равновесие.



Рисунок условия: верёвка лежит на столе, на её правый конец действует сила $\vec{F}$.

▲ **Решение. Что происходит.** Верёвка неподвижна, значит, в равновесии и любой её кусок. Поэтому мысленно разрежем её в точке B, где она отрывается от стола. Верёвка гибкая и в точке B только касается стола, без излома, поэтому сила натяжения $\vec{T}$ в этом сечении направлена вдоль касательной — горизонтально. Сначала возьмём поднятый кусок BC: на него действуют три силы, и из условия равновесия найдём T. Потом возьмём лежащий кусок AB: натяжение T тянет его по столу, а держит его сила трения покоя, которая не может быть больше μN. Отсюда и получится нижняя граница для μ.

Обозначения. B — точка, где верёвка отрывается от стола, C — поднятый конец, к которому приложена $\vec{F}$; α — угол между $\vec{F}$ и горизонтом; $\vec{T}$ — сила, с которой лежащая часть действует на BC в точке B. Масса куска BC равна $m/4$, куска AB — $3m/4$ (верёвка однородная, масса пропорциональна длине). Ось x направим вправо, ось y — вверх.



Кусок BC и действующие на него силы (длины стрелок — в одном масштабе при $F = mg/2$; точка — центр масс куска). Остальную верёвку заменяет сила $\vec{T}$.

1. Равновесие поднятого куска BC. Запишем условие равновесия для куска BC: сумма сил равна нулю. Векторно

$$\tfrac{1}{4}m\vec{g} + \vec{F} + \vec{T} = 0.$$

Спроецируем на оси; проекции $F_x = F\cos\alpha$ и $F_y = F\sin\alpha$ положительны, натяжение $\vec{T}$ смотрит влево, вес — вниз:

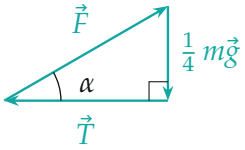
$$x:\ F\cos\alpha - T = 0, \qquad y:\ F\sin\alpha - \tfrac{1}{4}mg = 0.$$

Из второго уравнения $\sin\alpha = \dfrac{mg}{4F}$, и пока всё в порядке только при $F \geq mg/4$: меньшей силой нельзя поднять даже четверть верёвки.

2. Натяжение T. Неизвестным остался один угол. Исключим его через $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$: из первого уравнения $T = F\cos\alpha$, поэтому

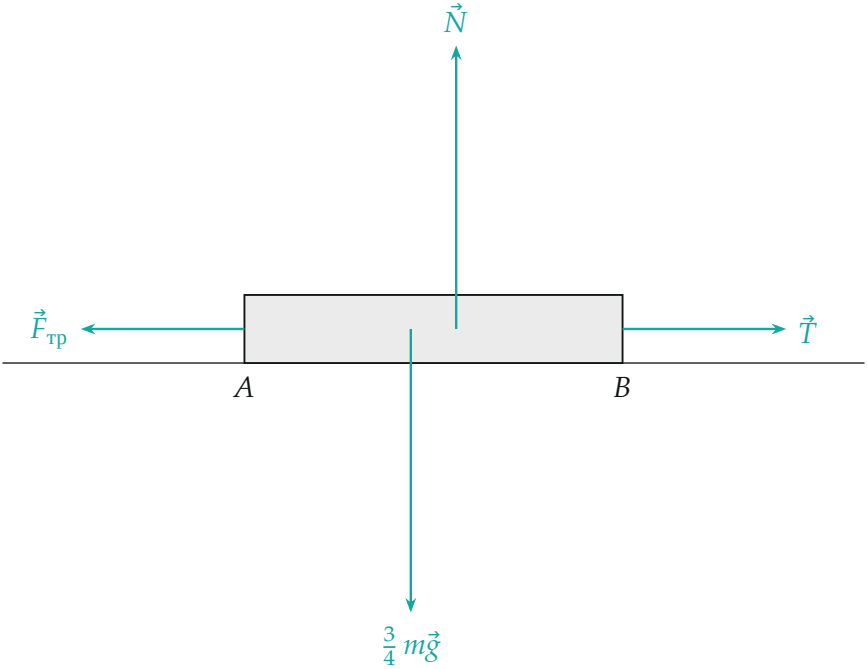
$$T = \sqrt{F^2 - F^2\sin^2\alpha} = \sqrt{F^2 - \left(\frac{mg}{4}\right)^2}.$$

Второй способ — прямоугольный треугольник сил: три силы, дающие в сумме ноль, замыкаются в треугольник, в котором F — гипотенуза, а T и $mg/4$ — катеты.



Треугольник сил для куска BC при $F = mg/2$: F — гипотенуза, $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha = 30°$, $T = F\cos\alpha \approx 0{,}87\,F$.

3. Равновесие лежащего куска AB. На него действуют: сила тяжести $\frac{3}{4}\,m\vec{g}$, нормальная реакция стола $\vec{N}$, сила натяжения $\vec{T}$ со стороны куска BC (по третьему закону Ньютона она равна по величине той, что действует на BC, и направлена вправо) и сила трения покоя $\vec{F}_{\text{тр}}$ со стороны стола.



Силы на лежащий кусок AB (схематично, толщина верёвки увеличена) при $F = mg/2$: $N = \frac{3}{4}\,mg$ и вес равны по длине, $F_{тр} = T$.

В проекциях на оси:

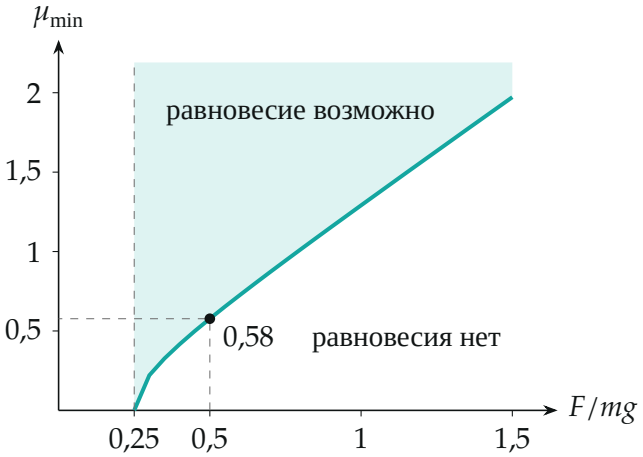
$$y:\ N - \tfrac{3}{4}\,mg = 0, \qquad x:\ T - F_{\text{тр}} = 0.$$

Обратите внимание: сила $\vec{T}$ горизонтальна, поэтому она не разгружает стол, и $N = \frac{3}{4}mg$ — вес только лежащей части, а не всей верёвки. Проверим другим способом: для всей верёвки целиком $N + F\sin\alpha = mg$, откуда $N = mg - \frac{1}{4}mg = \frac{3}{4}mg$, то же самое.

4. Условие равновесия по трению. Верёвка на столе покоится, поэтому трение — это трение покоя: оно подстраивается под T, но не может превысить максимального значения: $F_{\text{тр}} \le \mu N$ (только в таком случае лежащий кусок не поедет). Подставим $F_{\text{тр}} = T$ и $N = \frac{3}{4}mg$:

$$\sqrt{F^2 - \frac{m^2g^2}{16}} \le \mu\frac{3}{4}mg,$$

$$\mu \ge \frac{4}{3}\sqrt{\left(\frac{F}{mg}\right)^2 - \frac{1}{16}} = \frac{1}{3}\sqrt{16\left(\frac{F}{mg}\right)^2 - 1}.$$



Граница $\mu_{\min}$ в зависимости от F/mg (точки вычислены по формуле). Левее $F = mg/4$ равновесия нет при любом μ; точка — пример $F = mg/2$: $\mu \ge 0{,}58$.

Проверка. Размерность: F/mg безразмерно, коэффициент трения безразмерен. При $F \to mg/4$: сила только держит вес поднятой четверти, $\alpha = 90°$, горизонтальной составляющей нет, $T = 0$ и $\mu_{\min} = 0$, трение

не нужно. При $F \gg mg$: $\mu_{\min} \to \dfrac{4F}{3mg}$ — верёвку тянут почти горизонтально, $T \approx F$, $N = \frac{3}{4}mg$. Пример $F = mg/2$: $\alpha = 30^\circ$, $T = \dfrac{\sqrt{3}}{4}mg$, $\mu_{\min} = \dfrac{\sqrt{3}/4}{3/4} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}58$ — совпадает с формулой.

Смысл такой: чем сильнее тянем, тем больше горизонтальная составляющая T тянет лежащую часть и тем более шероховатым должен быть стол, чтобы она не поехала.

Ответ. $\mu \geq \dfrac{1}{3}\sqrt{16\left(\dfrac{F}{mg}\right)^2 - 1}$ (равновесие вообще возможно только при $F \geq mg/4$).