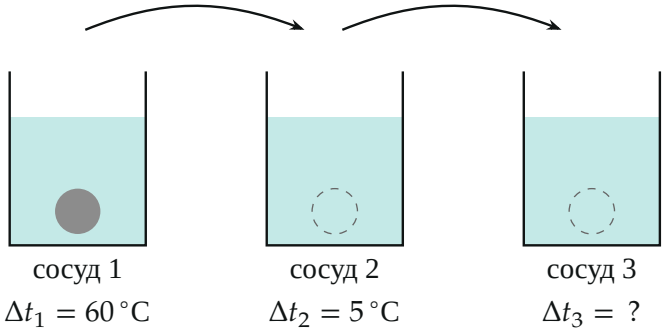
Деталь в трёх сосудах с маслом

Задача 1. [Росатом 2022/23, отборочный этап, 9 класс, задача 1] При закалке стальных деталей проводится следующая процедура. Имеются три одинаковых сосуда с маслом при одной и той же температуре. Горячую деталь опускают в первый сосуд, и после установления теплового равновесия температура масла в нем повышается на $\Delta t_1 = 60\,^\circ\text{C}$. После этого деталь переносят во второй сосуд, и после установления теплового равновесия температура масла в нем повышается на $\Delta t_2 = 5\,^\circ\text{C}$. После этого деталь переносят в третий сосуд. Насколько повысится температура масла в нем, когда наступит тепловое равновесие? Какой была первоначальная температура детали, если комнатная температура составляет $t_0 = 20\,^\circ\text{C}$? Сосуды теплоизолированы.



Поясняющий рисунок (в условии рисунка нет): деталь (тёмный кружок) последовательно переносят из сосуда в сосуд с маслом при комнатной температуре t_0; штриховой кружок — то место, куда деталь попадёт.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Горячая деталь отдаёт тепло маслу, пока их температуры не сравняются. Сосуды одинаковые, масло в каждом вначале имеет температуру t_0, а деталь с каждым разом всё холоднее. Главная идея: в каждом сосуде разность температур «деталь — масло» уменьшается в одно и то же число раз, потому что это число зависит только от теплоёмкостей. Поэтому повышения температуры масла $\Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3, \ldots$ образуют геометрическую прогрессию, и по первым двум членам находится третий.

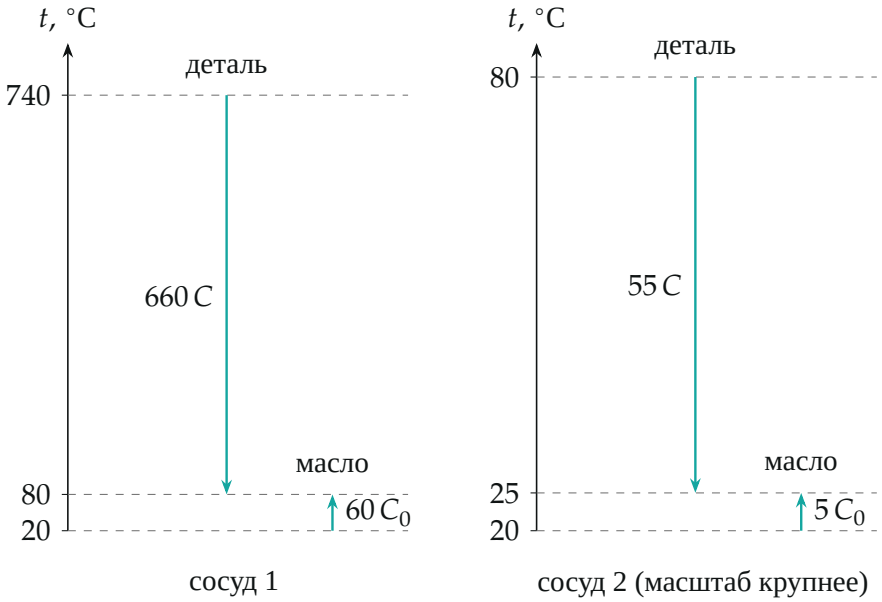
Обозначения. C — теплоёмкость детали, C_0 — теплоёмкость сосуда с маслом (у всех трёх одна и та же). T_n — температура детали после n-го сосуда, $T_0 = t$ — её начальная температура. После установления равновесия в n-м сосуде температура масла и детали одинакова и равна $T_n = t_0 + \Delta t_n$. Потерь тепла нет: сосуды теплоизолированы.

1. Уравнение теплового баланса для n-го сосуда. Деталь остывает от T_{n-1} до T_n и отдаёт количество теплоты $C\,(T_{n-1} - T_n)$. Масло с сосудом нагревается от t_0 до T_n и получает $C_0\,(T_n - t_0) = C_0 \Delta t_n$. Теплота отдана целиком, поэтому

$$C\,(T_{n-1} - t_0 - \Delta t_n) = C_0\,\Delta t_n,$$

$$\Delta t_n = \frac{C}{C + C_0}\,(T_{n-1} - t_0) = q\,(T_{n-1} - t_0), \qquad q = \frac{C}{C + C_0}.$$

Число q одно для всех сосудов: оно зависит только от C и C_0.



Тепловой баланс в первых двух сосудах: стрелка детали — остывание на $T_{n-1} - T_n$, стрелка масла — нагрев на Δt_n; бирюзовые длины пропорциональны

градусам (в левой панели 660 : 60, в правой 55 : 5; правая панель вычерчена в крупном масштабе). В обоих случаях $C_0 = 11\,C$.

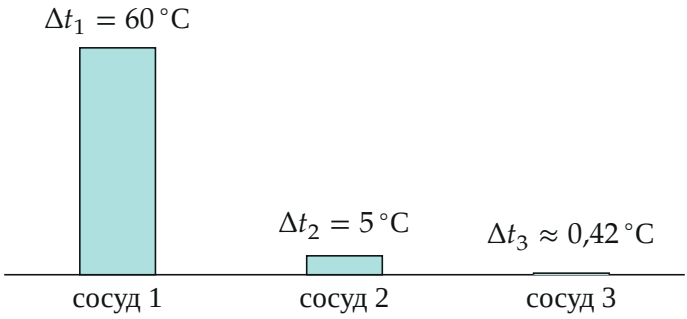
2. Связь соседних сосудов. После $(n-1)$-го сосуда деталь имеет температуру масла в нём: $T_{n-1} = t_0 + \Delta t_{n-1}$, то есть $T_{n-1} - t_0 = \Delta t_{n-1}$. Подставим в формулу пункта 1:

$$\Delta t_n = q\,\Delta t_{n-1} \qquad (n \geq 2).$$

Обратите внимание: для первого сосуда так писать нельзя — до него деталь имеет не температуру масла, а неизвестную t, и там $\Delta t_1 = q\,(t - t_0)$.

3. Множитель q и повышение температуры в третьем сосуде. Из пункта 2 для второго сосуда $q = \dfrac{\Delta t_2}{\Delta t_1} = \dfrac{5}{60} = \dfrac{1}{12}$. Для третьего

$$\Delta t_3 = q\,\Delta t_2 = \frac{\Delta t_2^2}{\Delta t_1} = \frac{25}{60}\,^\circ\text{C} \approx 0{,}42\,^\circ\text{C}.$$



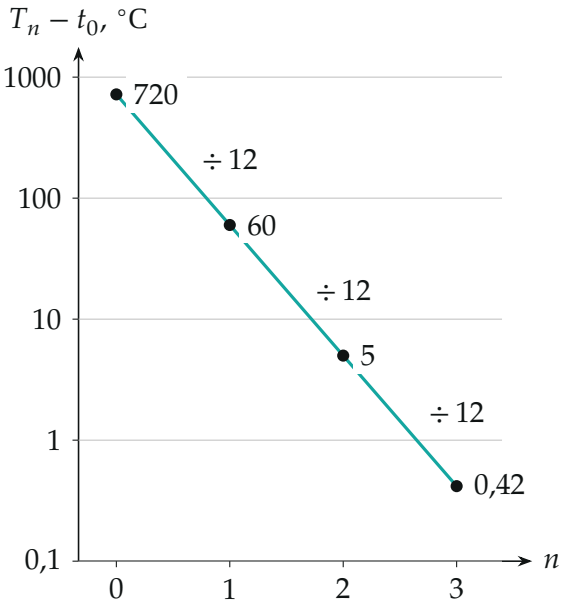
Повышения температуры масла в трёх сосудах в одном масштабе (высота столбика пропорциональна Δt; третий столбик почти не виден — его высота $0{,}42\,^\circ C$).

4. Первоначальная температура детали. Для первого сосуда (пункт 1 при $n = 1$): $\Delta t_1 = q\,(t - t_0)$, откуда

$$t - t_0 = \frac{\Delta t_1}{q} = 12\,\Delta t_1 = \frac{\Delta t_1^2}{\Delta t_2} = \frac{3600}{5}\,^\circ\text{C} = 720\,^\circ\text{C},$$

$$t = t_0 + \frac{\Delta t_1^2}{\Delta t_2} = 20\,^\circ\text{C} + 720\,^\circ\text{C} = 740\,^\circ\text{C}.$$

Обратите внимание: число 720 °C — это разность $t - t_0$, а не температура детали; комнатные 20 °C надо прибавить.



Превышение температуры детали над комнатной после n сосудов (вертикальная ось — логарифмическая; точки вычислены): при каждом переносе величина уменьшается в 12 раз, поэтому точки лежат на одной прямой. Точка $n = 0$ — исходная деталь, $T_0 - t_0 = 720\,^\circ C$.

Проверка. Размерность: $\Delta t_2^2/\Delta t_1$ — градусы, и $\Delta t_1^2/\Delta t_2$ — градусы. Второй способ — через теплоёмкости: из $q = \frac{1}{12}$ получаем $C_0 = 11\,C$ (рисунок пункта 1). Первый сосуд: деталь отдаёт $C\,(740 - 80) = 660\,C$, масло получает $11\,C \cdot 60 = 660\,C$. Второй: $C\,(80 - 25) = 55\,C$ и $11\,C \cdot 5 = 55\,C$. Третий: деталь остывает от 25 до 20,42 °C, то есть отдаёт $4{,}58\,C$, масло получает $11\,C \cdot 0{,}417 = 4{,}58\,C$. Балансы сходятся.

Смысл такой: масло в сосуде забирает у детали лишь 1/12 часть разности температур, поэтому деталь остывает медленно, а нагрев масла в каждом следующем сосуде в 12 раз меньше.

Ответ. 1) $\Delta t_3 = \dfrac{\Delta t_2^2}{\Delta t_1} \approx 0{,}42\,^\circ\text{C}$; 2) $t = t_0 + \dfrac{\Delta t_1^2}{\Delta t_2} = 740\,^\circ\text{C}$.