Растворяющийся мешочек на весах

Задача 2. [Росатом 2022/23, отборочный этап, 9 класс, задача 2] Марлевый мешочек заполнен растворимым в воде веществом. Мешочек на нити опускают в стакан с водой, стоящий на весах, так что он не касается дна или стенок сосуда. При этом показания весов изменяются на ΔP. На сколько изменятся показания весов, когда вещество полностью растворится (по сравнению со случаем, когда мешочек уже опущен в воду, но растворение еще не началось)? Весом марли пренебречь. Плотность растворимого вещества втрое больше плотности воды.

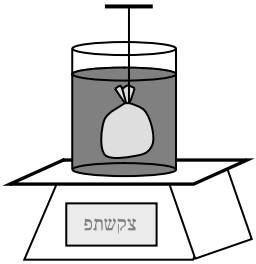
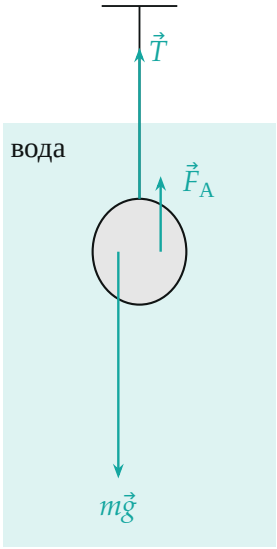


Рисунок условия: мешочек на нити в стакане с водой, стакан стоит на весах.

▲ **Решение. Что происходит.** Весы показывают, какая сила давит на них снизу вверх, а точнее — какая масса на них «лежит» (показания в единицах массы: $P = N/g$, где N — сила, с которой стакан давит на весы). Пока вещество в мешочке, часть его веса держит нить, и на весы эта часть не давит. Когда вещество растворится, мешочек опустеет, нить перестанет что-либо держать, и весь вес вещества ляжет на весы. Главная идея: сравнить две силы натяжения нити — до растворения и после, и посмотреть, на сколько изменилась нагрузка на весы.

Обозначения. V — объём вещества в мешочке (он же объём мешочка), ρ_0 — плотность воды, $\rho = 3\rho_0$ — плотность вещества, M — масса стакана с водой (без мешочка). $P_0 = M$ — показания весов без мешочка, P_1 — когда мешочек опущен, но вещество не растворилось, P_2 — когда вещество растворилось. Весом марли пренебрегаем, поэтому мешочек весит столько же, сколько вещество в нём.

1. Силы на мешочек. Мешочек покоится на нити в воде. На него действуют: сила тяжести $m\vec{g}$ с $m = \rho V = 3\rho_0 V$, сила Архимеда $\vec{F}_\text{A}$ со стороны воды, $F_\text{A} = \rho_0 g V$ (вытеснен объём воды V), и сила натяжения нити $\vec{T}$ — вдоль нити вверх.



Силы на мешочек в воде (в одном масштабе: $mg = 3\rho_0 g V$, $F_A = \rho_0 g V$, $T = 2\rho_0 g V$).

Мешочек в равновесии, сумма сил равна нулю; в проекции на ось, направленную вверх:

$$T + F_\text{A} - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad T = 3\rho_0 g V - \rho_0 g V = 2\rho_0 g V.$$

2. Что показывают весы, пока мешочек не растворился. Возьмём в качестве тела «стакан с водой» (без мешочка). Сверху на воду мешочек давит с силой $\vec{F}_\text{A}'$: по третьему закону Ньютона она равна по модулю силе Архимеда, которую вода действует на мешочек, и направлена вниз. Кроме неё, на стакан с водой действуют сила тяжести $M\vec{g}$ и реакция весов $\vec{N}_1$. В проекции на вертикаль

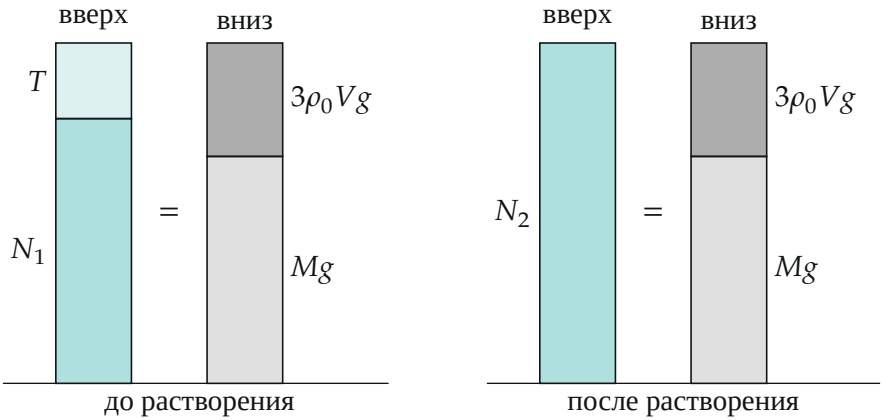
$$N_1 = Mg + F_\text{A} = Mg + \rho_0 g V.$$

Весы показывают $P_1 = N_1/g = M + \rho_0 V$. Без мешочка показания были $P_0 = M$, значит, опускание мешочка прибавило $\rho_0 V$, то есть

$$\Delta P = \rho_0 V.$$

(Показания выросли на массу вытесненной воды — так и должно быть.)

3. Что показывают весы после растворения. Вещество смешалось с водой, мешочек пуст, поэтому нить ничего не держит: $T = 0$. Всё вещество (его масса $\rho V = 3\rho_0 V$ сохранилась) оказалось в стакане, и теперь на весы давит всё: $N_2 = (M + 3\rho_0 V)g$, $P_2 = M + 3\rho_0 V$. Обратите внимание: масса вещества при растворении не меняется, поэтому не важно, как изменился объём раствора и уровень воды: весы «чувствуют» только суммарный вес и натяжение нити.



Силы, действующие на систему «стакан + вода + мешочек», в одном масштабе (вес стакана с водой взят условно, $Mg = 6\rho_0 Vg$). Нить держит часть веса до растворения (вверх: $N_1 + T$), после растворения $T = 0$ и весь вес воспринимают весы (N_2).

Разберём то же самое для всей системы целиком — второй способ. Силы на систему «стакан + вода + мешочек»: вниз — суммарная сила тяжести $(M + 3\rho_0 V)g$; вверх — реакция весов N и натяжение нити T (нить прикреплена к опоре над стаканом). Условие равновесия:

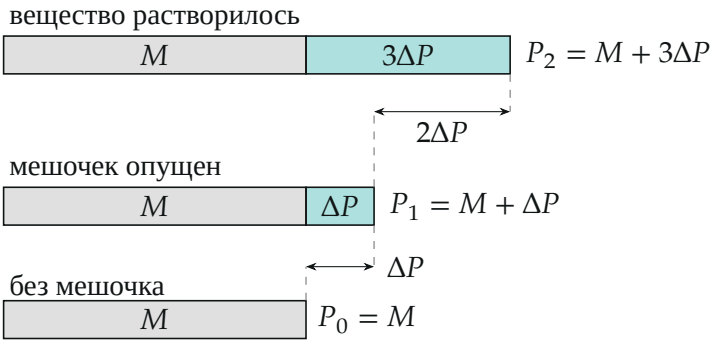
$$N + T = (M + 3\rho_0 V)g.$$

До растворения $T = 2\rho_0 g V$, поэтому $N_1 = (M + \rho_0 V)g$ — то же, что в пункте 2. После растворения $T = 0$ и $N_2 = (M + 3\rho_0 V)g$. Разность $N_2 - N_1 = T_{\text{до}} = 2\rho_0 g V$: весы получили ту часть веса, которую раньше держала нить.

4. Ответ на вопрос задачи. Сравниваем со случаем, когда мешочек опущен, но не растворился:

$$P_2 - P_1 = (M + 3\rho_0 V) - (M + \rho_0 V) = 2\rho_0 V = 2\,\Delta P.$$

Обратите внимание: $3\Delta P$ — это изменение показаний по сравнению с весами без мешочка, а в вопросе сравнение с моментом, когда мешочек уже опущен, поэтому вычитается ещё ΔP.



Показания весов в трёх состояниях (длина сегмента пропорциональна массе; масса M условная). Показания растут сначала на ΔP, затем ещё на $2\Delta P$.

Проверка. Размерность: все слагаемые — массы. Общий случай: если плотность вещества ρ, то $T = (\rho - \rho_0)gV$ и показания изменятся на $(\rho - \rho_0)V = \left(\dfrac{\rho}{\rho_0} - 1\right)\Delta P$; при $\rho = 3\rho_0$ получаем $2\Delta P$. Предельный случай $\rho = \rho_0$: мешочек «висит» в воде без натяжения, растворение показаний не меняет — формула даёт ноль.

Смысл такой: растворение перекладывает на весы вес вещества, который раньше удерживала нить, то есть вес вещества минус сила Архимеда.

Ответ. Показания весов увеличатся на $2\,\Delta P$.