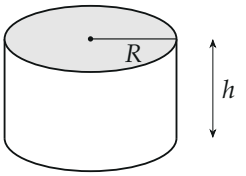
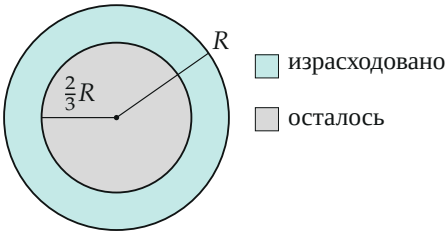
Рулон газетной бумаги

Задача 3. [Росатом 2022/23, отборочный этап, 9 класс, задача 3] В типографию, печатающую газеты, завезли большой рулон газетной бумаги. Через 10 дней непрерывной работы радиус рулона сократился до величины, составляющей 2/3 от первоначального. На сколько еще дней работы хватит оставшейся бумаги? Считать, что расход бумаги одинаков каждый день, и рулон состоит из бумаги целиком.



рулон — сплошной цилиндр



вид сверху через 10 дней

Поясняющий рисунок (в условии рисунка нет): рулон — цилиндр радиуса R и высоты h; через 10 дней его радиус уменьшился до $2R/3$.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Бумагу расходуют равномерно: за каждый день одно и то же количество, то есть один и тот же объём. Рулон — сплошной цилиндр (бумага без стержня), его высота h не меняется, значит, объём рулона пропорционален площади круга, а не радиусу. Главная идея: радиус сократился на треть, но объём — сильнее, и именно объёмы нужно сравнивать: объём бумаги, израсходованный за 10 дней, и объём остатка.

Обозначения. R — первоначальный радиус рулона, h — его высота, $V = \pi R^2 h$ — объём всего рулона (то есть бумаги). $t_1 = 10$ дней — время, за которое радиус стал $2R/3$; τ — искомое время, на которое хватит остатка. Плотность и толщина бумаги постоянны, поэтому расход в объёме одинаков каждый день: $q = \text{const}$ (объём в день).

1. Израсходованная бумага. Объём цилиндра радиуса r равен $\pi r^2 h$. За 10 дней радиус уменьшился с R до $2R/3$, то есть исчез слой бумаги

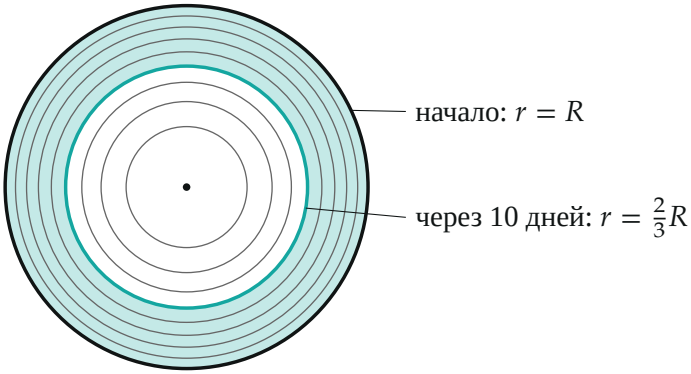
между этими цилиндрами:

$$V_1 = \pi R^2 h - \pi\Big(\frac{2R}{3}\Big)^2 h = \Big(1 - \frac{4}{9}\Big)\pi R^2 h = \frac{5}{9}\,\pi R^2 h.$$

2. Оставшаяся бумага. Остался цилиндр радиуса $2R/3$:

$$V_2 = \pi\Big(\frac{2R}{3}\Big)^2 h = \frac{4}{9}\,\pi R^2 h.$$

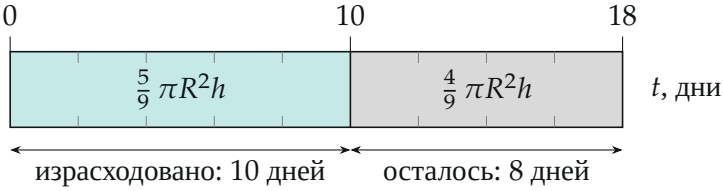
Обратите внимание: радиус сократился на $\frac{1}{3}$, но израсходовано $\frac{5}{9}$ объёма, а не $\frac{1}{3}$. Если считать «радиус убыл на треть за 10 дней, значит, остальные $\frac{2}{3}$ радиуса уйдут за 20», получится неверный ответ: объём пропорционален квадрату радиуса.



Контуры рулона каждые 2 дня (радиусы вычислены по формуле пункта 4): площади всех колец одинаковы, поэтому к концу кольца становятся всё уже. Закрашенное кольцо — бумага, израсходованная за первые 10 дней; центр — момент через 18 дней.

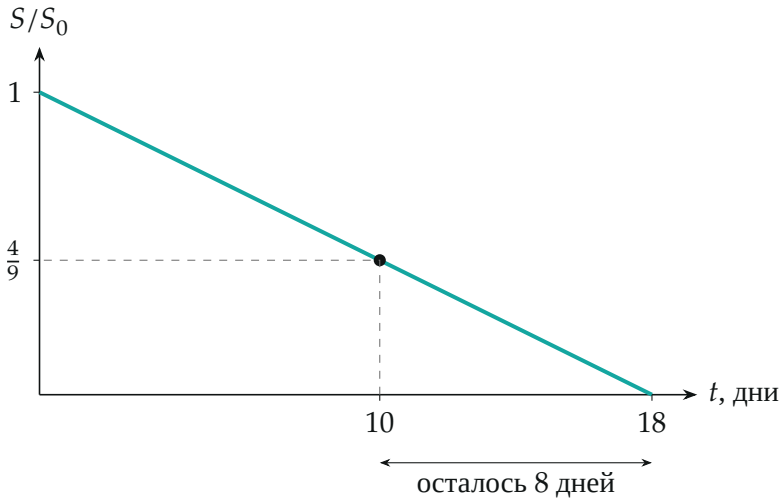
3. Сколько дней хватит остатка. Расход бумаги в объёме одинаков каждый день, значит, время работы пропорционально израсходованному объёму: $V_1 = q\,t_1$ и $V_2 = q\,\tau$. Разделим второе уравнение на первое:

$$\frac{\tau}{t_1} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{4/9}{5/9} = \frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{4}{5}\cdot 10 \text{ дней} = 8 \text{ дней}.$$

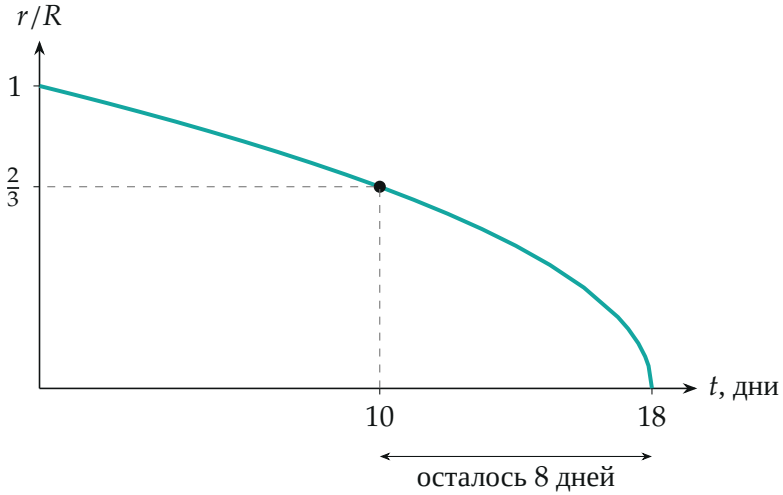


Весь объём разбит на 9 равных долей (по 2 дня работы каждая): израсходованная бумага — 5 долей, оставшаяся — 4. Одна доля — 2 дня, поэтому остаток рассчитан на $4 \cdot 2 = 8$ дней, а весь рулон — на 18 дней.

4. Второй способ — график. Площадь сечения рулона $S = \pi r^2$ убывает с постоянной скоростью (расход одинаков, высота h не меняется): $S(t) = S_0(1 - t/T)$, где T — время, на которое хватило бы всего рулона. Тогда радиус $r = R\sqrt{1 - t/T}$. Условие $r(10) = \frac{2}{3}R$ даёт $1 - \dfrac{10}{T} = \dfrac{4}{9}$, то есть $T = 18$ дней. Значит, на оставшееся время приходится $T - t_1 = 18 - 10 = 8$ дней.



Площадь сечения рулона (в долях начальной) от времени: расход одинаков, поэтому график — прямая: единица в начале и нуль через 18 дней; точка — $t = 10$ дней, $S/S_0 = \frac{4}{9}$.



Радиус рулона от времени: $r = R\sqrt{1 - t/18}$ (точки вычислены). Радиус убывает всё быстрее и обращается в нуль через 18 дней, поэтому «по радиусу» остаток нельзя прикидывать линейно.

Проверка. Размерность: отношение объёмов безразмерно, ответ в днях. Проверка по радиусу: за 18 дней $r = R\sqrt{1 - 10/18} = R\sqrt{4/9} = \frac{2}{3}R$ — совпадает с условием. Предел: если бы радиус за 10 дней упал вдвое, было бы $V_2/V_1 = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$, остаток на 3,3 дня; чем меньше остался радиус, тем меньше дней — как и должно быть.

Смысл такой: убывает не радиус, а площадь сечения, и именно она меняется с постоянной скоростью.

Ответ. Остатка бумаги хватит ещё на 8 дней.