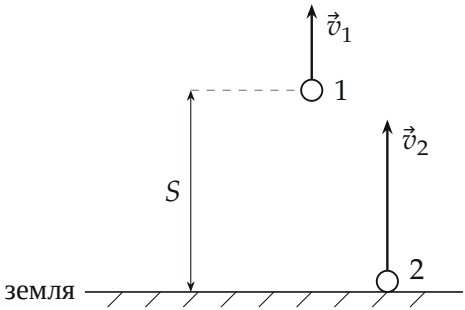
Расстояние между двумя телами

Задача 4. [Росатом 2022/23, отборочный этап, 9 класс, задача 4] Из одной точки с поверхности земли вертикально вверх бросили с некоторым запаздыванием друг относительно друга два тела. Известно, что начальная скорость первого тела v_0, второго — $2v_0/3$, и что тела упали на землю одновременно. Найти максимальное расстояние между ними в процессе движения. Ответ обосновать.



Поясняющий рисунок (в условии рисунка нет): момент броска второго тела. Первое тело на высоте S летит вверх со скоростью $v_1 = v_0/3$, второе стартует с земли со скоростью $v_2 = 2v_0/3$. Длины стрелок скоростей пропорциональны величинам; $S = \dfrac{4v_0^2}{9g}$ — ответ задачи, выведенный ниже.

▲ **Решение. Что происходит.** Оба тела движутся с одним и тем же ускорением g, направленным вниз. Поэтому после броска второго тела они друг относительно друга движутся равномерно, и расстояние между ними меняется по линейному закону. В конце оба тела оказываются на земле в одной точке, то есть расстояние обращается в нуль. Значит, на всём этапе после броска второго тела расстояние только убывает, а до броска второе тело лежит на земле, и расстояние равно высоте первого тела. Главная идея: наибольшее расстояние — в момент броска второго тела, и нужно найти высоту первого тела в этот момент.

Обозначения. Ось x направлена вертикально вверх, начало — на земле, в точке броска. Время t отсчитываем от броска первого тела; Δ —

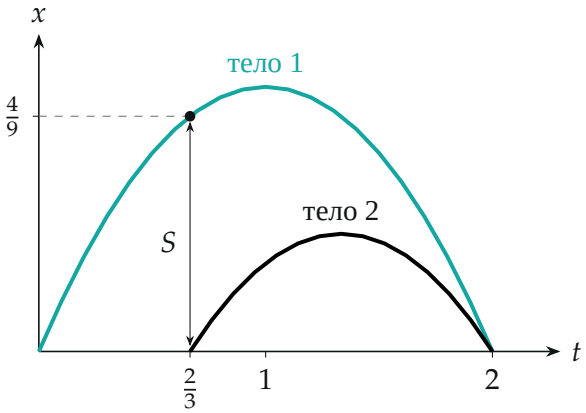
момент броска второго; $x_1(t)$, $x_2(t)$ — высоты тел; v_1, v_2 — проекции их скоростей. Сопротивлением воздуха пренебрегаем.

1. Время полёта каждого тела. Тело, брошенное вверх со скоростью u, поднимается и падает обратно на землю за время $2u/g$: из $x = ut - gt^2/2 = 0$ получаем $t = 2u/g$. Для первого и второго тел

$$t_1 = \frac{2v_0}{g}, \qquad t_2 = \frac{2 \cdot \frac{2}{3}v_0}{g} = \frac{4v_0}{3g}.$$

2. Задержка броска. Оба тела упали одновременно, поэтому второе тело брошено позже на разность времён полёта:

$$\Delta = t_1 - t_2 = \frac{2v_0}{g} - \frac{4v_0}{3g} = \frac{2v_0}{3g}.$$



Высоты тел $x_1(t)$ и $x_2(t)$ (парабол): по оси t — единицы v_0/g, по оси x — единицы v_0^2/g (точки вычислены). Тела падают в одно время $t = 2$; $\frac{2}{3}$ — момент броска второго, S — расстояние между телами в этот момент.

3. Расстояние до броска второго тела. Пока второе тело не брошено, оно лежит на земле, и расстояние равно высоте первого: $d = x_1(t)$. Оно растёт, пока первое тело поднимается, то есть до момента $t = v_0/g$. Задержка $\Delta = \dfrac{2v_0}{3g}$ меньше этого времени, поэтому к моменту броска

первое тело ещё поднимается, и расстояние на промежутке $0 \le t \le \Delta$ возрастает.

4. Состояния тел в момент броска второго. Подставим $t = \Delta$ в законы движения первого тела:

$$x_1(\Delta) = v_0\Delta - \frac{g\Delta^2}{2} = \frac{2v_0^2}{3g} - \frac{2v_0^2}{9g} = \frac{4v_0^2}{9g}, \qquad v_1 = v_0 - g\Delta = \frac{v_0}{3} > 0.$$

Скорость первого тела положительна — оно действительно ещё поднимается.

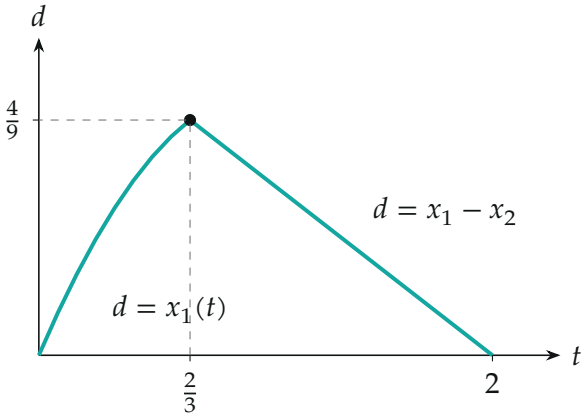
5. Расстояние после броска второго тела. Время τ отсчитываем от броска второго. Законы движения при постоянном ускорении:

$$x_1 = x_1(\Delta) + v_1\tau - \frac{g\tau^2}{2}, \qquad x_2 = v_2\tau - \frac{g\tau^2}{2}, \qquad v_2 = \frac{2v_0}{3}.$$

Вычтем: слагаемые с $g\tau^2/2$ сокращаются, то есть относительное движение равномерное:

$$d = x_1 - x_2 = x_1(\Delta) + (v_1 - v_2)\,\tau = \frac{4v_0^2}{9g} - \frac{v_0}{3}\,\tau.$$

Обратите внимание: расстояние уменьшается линейно, потому что относительная скорость $v_1 - v_2 = -v_0/3$ постоянна. Расстояние обращается в нуль при $\tau = \dfrac{4v_0}{3g} = t_2$ — ровно в момент падения, как и должно быть по условию.

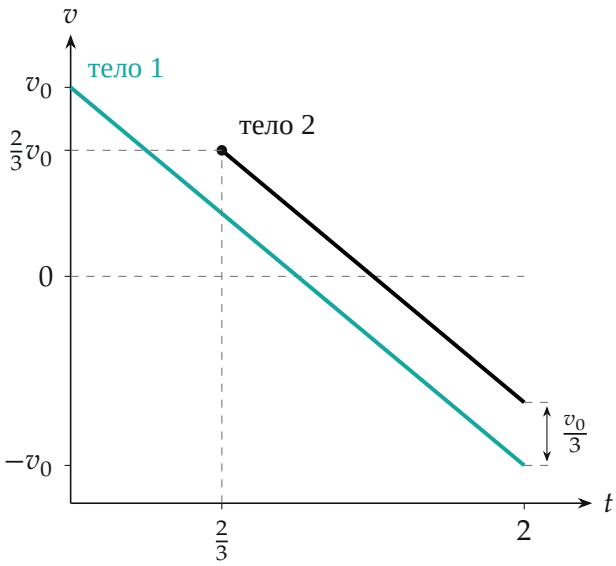


Расстояние между телами $d(t)$ (единицы те же): до броска второго оно растёт вместе с высотой первого, после — линейно убывает до нуля. Максимум $d = \frac{4}{9}$ (то есть $\frac{4v_0^2}{9g}$) — в момент броска второго тела.

6. Вывод. На промежутке $0 \le t \le \Delta$ расстояние растёт, при $t \ge \Delta$ линейно убывает, поэтому наибольшее значение достигается ровно при $t = \Delta$:

$$S_{\max} = x_1(\Delta) = \frac{4v_0^2}{9g}.$$

Второй способ — через скорости: в системе отсчёта, связанной с первым телом, второе движется равномерно, потому что их ускорения равны. На графике скоростей это видно как две параллельные прямые.



Скорости тел $v_1(t)$ и $v_2(t)$ (в единицах v_0 по вертикали и v_0/g по горизонтали): прямые параллельны, их вертикальное расстояние — постоянная относительная скорость $v_0/3$. Второе тело стартует при $t = \frac{2}{3}$ со скоростью $\frac{2}{3}v_0$.

Проверка. Размерность: v_0^2/g — длина. Численно: при $v_0 = g = 1$ перебор расстояния по сетке времени даёт максимум $0{,}44444$ при $t = 0{,}6667$, то есть $4/9$ при $t = \Delta$. Предел: если $v_2 \to v_0$, то $\Delta = \dfrac{2(v_0 - v_2)}{g} \to 0$ и расстояние $S_{\max} \to 0$ — тела стартуют вместе и падают вместе. Также видно, что высота подъёма первого тела $v_0^2/(2g) = 0{,}5\,v_0^2/g$ — не ответ: к моменту, когда первое тело достигает вершины, второе уже подлетело, и расстояние меньше $4/9$.

Смысл такой: у двух свободно летящих тел одинаковое ускорение, поэтому расстояние между ними — линейная функция времени (после броска второго тела), а наибольшее значение она принимает на краю промежутка — в момент броска или в момент падения.

Ответ. $S_{\max} = \dfrac{4v_0^2}{9g}$ (достигается в момент броска второго тела).